

∞ Corrigé du baccalauréat S Asie 16 juin 2015 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flèches atteignant la cible.

Pour un tir, la probabilité du succès est $p = 0,8$.

On répète 4 fois de façon indépendante le tir, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On cherche ici :

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^1 + \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times 0,2^0 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$$

$$P(X \geq 3) \approx 0,819$$

2. Le concurrent tire n flèches de façon indépendante; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

Pour atteindre en moyenne 12 fois la cible, il faut que l'espérance mathématique de la variable X soit égale à 12. Une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique $E(X) = np$.

$$\text{On doit donc chercher } n \text{ pour que } n \times 0,8 = 12 \iff n = \frac{12}{0,8} \iff n = 15.$$

Il faut donc que le concurrent prévoise 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible 12 fois.

Partie B

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Pour que la flèche soit hors de la bande grisée, il faut que $(X < -10)$ ou $(X > 10)$.

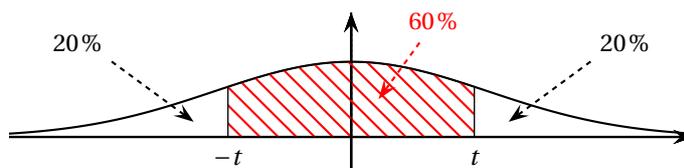
On cherche donc $P((X < -10) \cup (X > 10))$ qui est égale à $1 - P(-10 \leq X \leq 10)$.

X suit la loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 10$, et on sait que pour toute loi normale, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$ donc $P(-10 \leq X \leq 10) \approx 0,683$.

On peut donc dire que la probabilité que la flèche soit hors de la bande grisée est approximativement de $1 - 0,683 = 0,317$.

On peut également trouver ce résultat en utilisant la calculatrice.

2. On cherche un nombre positif t tel que $P(-t \leq X \leq t) = 0,6$. Cela correspond au schéma suivant, en tenant compte des propriétés de symétrie de la fonction de densité de la loi normale :



$$\begin{aligned}
 P(-t \leq X \leq t) = 0,6 &\iff P(X \leq t) - P(X \leq -t) = 0,6 \\
 &\iff P(X \leq t) - P(X \geq t) = 0,6 \\
 &\iff P(X \leq t) - (1 - P(X \leq t)) = 0,6 \\
 &\iff 2P(X \leq t) - 1 = 0,6 \\
 &\iff 2P(X \leq t) = 1,6 \\
 &\iff P(X \leq t) = 0,8
 \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $t \approx 8,416$.

Les deux droites verticales délimitant la bande grise ont pour équations $x = -8,4$ et $x = 8,4$; alors la probabilité d'atteindre cette bande grisée est approximativement de 0,6.

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

D'après le cours, on peut dire que $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ et que

$$P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

1. La probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures est $P(T \geq 2000)$.

$$P(T \geq 2000) = e^{-10^{-4} \times 2000} \approx 0,819$$

2. *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ , est définie par : $E(T) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$.

- a. On considère la fonction F , définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$.

La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$F'(x) = -1 \times e^{-\lambda x} + \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \times (-\lambda) e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} = \lambda x e^{-\lambda x} = f(x)$$

Donc F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

- b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire T est :

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(0)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} \right] - \left[-\frac{1}{\lambda} \times 1 \right] \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-\lambda x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} \text{ donc } E(T) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\bullet \lambda > 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x = +\infty \\
 &\text{On pose } X = \lambda x \\
 &\text{On sait que } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty
 \end{aligned} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\bullet \lambda > 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x = +\infty \\
 &\text{On pose } X = \lambda x \\
 &\text{On sait que } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0
 \end{aligned} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = 0$$

$$\bullet \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \text{ et donc } E(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4 \text{ soit } 10\,000 \text{ heures.}$$

Exercice 2**4 points****Commun à tous les candidats**

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 d'équations respectives $x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

1. **Affirmation 1** : les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont perpendiculaires.

Le plan \mathcal{P}_1 a pour vecteur normal $\vec{n}_1 : (1; 1; 1)$ et le plan \mathcal{P}_2 a pour vecteur normal

$\vec{n}_2 : (7; -2; 1)$.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 7 - 2 + 1 = 6 \neq 0$ donc ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux et donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas perpendiculaires.

Affirmation 1 : FAUSSE

2. **Affirmation 2** : les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On a vu dans la question précédente que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 avaient respectivement pour vecteurs normaux $\vec{n}_1 : (1; 1; 1)$ et $\vec{n}_2 : (7; -2; 1)$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont donc sécants.

Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Pour voir si cette droite est l'intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , il suffit de déterminer deux points de cette droite et de vérifier s'ils appartiennent aux deux plans.

- En remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de la droite d , on obtient le point $A(0; 1; 4)$. Or $x_A + y_A + z_A - 5 = 0 + 1 + 4 - 5 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}_1$, et $7x_A - 2y_A + z_A - 2 = 0 - 2 + 4 - 2 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}_2$. On peut dire que $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
- En remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de la droite d , on obtient le point $B(1; 3; 1)$. Or $x_B + y_B + z_B - 5 = 1 + 3 + 1 - 5 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}_1$, et $7x_B - 2y_B + z_B - 2 = 7 - 6 + 1 - 2 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}_2$. On peut dire que $B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

L'intersection des deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 est la droite (AB) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : VRAIE

3. **Affirmation 3** : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0,658; 0,771]$.

Le joueur gagne avec une fréquence de $f = \frac{223}{312} \approx 0,7147$.

L'échantillon est de taille $n = 312 > 30$; $n \times f = 223 > 5$ et $n \times (1 - f) = 89 > 5$.

Donc on peut déterminer l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}; \frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}} \right] \approx [0,658; 0,771]$$

Affirmation 3 : VRAIE

Remarque du correcteur – En fait, les deux bornes de l'intervalle ont pour valeurs approchées à 10^{-4} les nombres 0,658 1 et 0,771 4; la règle veut que l'on arrondisse par défaut la borne inférieure, et par excès la borne supérieure, pour que l'intervalle obtenu contienne l'intervalle donné par la formule; l'intervalle obtenu serait alors $[0,658; 0,772]$ ce qui rendrait l'affirmation fausse.

Mais était-ce vraiment l'intention du concepteur du sujet de « jouer » sur la troisième décimale? Il faudrait, pour en être sûr, avoir les consignes de correction.

4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a ; b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0,3$ x prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\frac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

On fait tourner l'algorithme avec les valeurs de a , de b et l'expression de f données dans le texte, et on va décrire ce qui se passe à chaque étape en affichant l'état des variables a , b et x :

	a	b	x
a reçoit la valeur 1	1		
b reçoit la valeur 2	1	2	
$b - a = 1 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1	2	
x prend la valeur $\frac{a+b}{2} = 1,5$	1	2	1,5
$f(a) = 1^2 - 3 = -2$	1	2	1,5
$f(x) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1	2	1,5
$f(x) \times f(a) > 0$ donc a prend la valeur $x = 1,5$	1,5	2	1,5
fin du tant que	1,5	2	1,5
$b - a = 0,5 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1,5	2	1,5
x prend la valeur $\frac{a+b}{2} = 1,75$	1,5	2	1,75
$f(a) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1,5	2	1,75
$f(x) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$	1,5	2	1,75
$f(x) \times f(a) < 0$ donc b prend la valeur $x = 1,75$	1,5	1,75	1,75
fin du tant que	1,5	1,75	1,75
$b - a = 0,25 \leq 0,3$ donc on n'entre pas dans la boucle	1,5	1,75	1,75
On affiche $\frac{a+b}{2} = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625$	1,5	1,75	1,75

Affirmation 4 : FAUSSE

Il s'agit de l'algorithme de recherche par dichotomie de la solution positive de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

Exercice 3**6 points****Commun à tous les candidats**

Pour tout n de \mathbb{N} , on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par : $f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$.

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

- On sait que, pour tout X , $e^X > 0$ donc $e^{n(x-1)} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
Sur $[0; 1]$, $x \geq 0$, donc $x + e^{n(x-1)} > 0 \iff f_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - f_n est dérivable sur \mathbb{R} et $f'_n(x) = 1 + ne^{n(x-1)}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $ne^{n(x-1)} > 0$ donc $f'_n(x) > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.
- $f_n(1) = 1 + e^0 = 2$ donc toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par le point A de coordonnées (1; 2).
- À l'aide des représentations graphiques, on peut conjecturer que le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe \mathcal{C}_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe \mathcal{C}_n est égal à $f'_n(x_A) = f'_n(1) = 1 + n$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(1) = +\infty$

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = f_n(x)$.

- Dans cette question, on suppose que $x = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 2$ donc la suite (u_n) est constante et chacun de ses termes est égal à 2; la suite (u_n) admet donc le nombre 2 comme limite.
- Dans cette question, on suppose que $0 \leq x < 1$.
 $x \in [0; 1[\implies x - 1 < 0$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x - 1) = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(x-1)} = 0$ (limite de fonctions composées)
On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + e^{n(x-1)}) = x$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.

Partie C : aire sous les courbes \mathcal{C}_n

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_n et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques et particulièrement en regardant l'aire sous la courbe \mathcal{C}_{100} , on peut conjecturer que la limite de la suite A_n est $\frac{1}{2}$.

Pour démontrer cette conjecture, on cherche une primitive de la fonction f_n : pour $n > 0$, la fonction F_n définie par $F_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{n(x-1)}}{n}$ est une primitive de f_n sur $[0; 1]$.

La fonction f_n est positive sur $[0; 1]$ donc l'aire A_n est donnée par $\int_0^1 f_n(t) dt$.

$$\text{Pour } n > 0, A_n = \int_0^1 f_n(t) dt = F_n(1) - F_n(0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right] - \left[0 + \frac{e^{-n}}{n} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{n} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n} \right) = \frac{1}{2}; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 4**5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie A : propriétés du nombre j

1. a. On résout l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$; $\Delta = -3 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

b. $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

2. $|j|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ donc $|j| = 1$

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ on cherche } \theta \text{ tel que } \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ Donc } \theta = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

La forme exponentielle de j est donc : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. a. $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{2\pi \times 3}{3}} = e^{i \times 2\pi} = 1$

b. j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ donc $j^2 + j + 1 = 0$ et donc $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

P a pour affixe 1; Q a pour affixe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $j^2 = -1 - j = -1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$PQ^2 = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right|^2 = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \implies PQ = \sqrt{3}$$

$$QR^2 = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = |-i\sqrt{3}|^2 = 3 \implies QR = \sqrt{3}$$

$$RP^2 = \left| 1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \left| \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \implies RP = \sqrt{3}$$

$PQ = QR = RP$ donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. On sait que $a + bj + cj^2 = 0$ donc $a = -jb - j^2c$.

Or, d'après la question A. 3. b., $j^2 = -1 - j$ donc :

$$a = -jb - j^2c = -jb - (-1 - j)c = -jb + c + jc \iff a - c = j(c - b)$$

2. $a - c = j(c - b) \implies |a - c| = |j(c - b)| \iff |a - c| = |j| \times |c - b|$

On a vu précédemment que $|j| = 1$; de plus $|a - c| = AC$ et $|c - b| = BC$.

On a donc démontré que $AC = BC$.

3. On sait que $a = -jb - j^2c$. On sait aussi que $j^2 = -1 - j$ donc $j = -1 - j^2$.

On a donc $a = -(-1 - j^2)b - j^2c = b + j^2b - j^2c$ ce qui équivaut à $a - b = j^2(b - c)$.

4. On sait que $|j| = 1$ donc $|j^2| = |j|^2 = 1$. De plus $|a - b| = AB$ et $|b - c| = CB$.

On a vu dans la question précédente que $a - b = j^2(b - c)$ ce qui entraîne $|a - b| = |j^2(b - c)|$ ou encore $|a - b| = |j^2| \times |b - c|$. Cette dernière égalité équivaut à $AB = CB$.

Comme $AC = BC$ et $AB = CB$, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 4**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \dots + n$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. $36 = \frac{72}{2} = \frac{8 \times 9}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ donc 36 est un nombre triangulaire.

De plus, $36 = 6^2$.

2. a. $1 + 2 + \dots + n = p^2 \iff \frac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n(n+1) = 2p^2 \iff n^2 + n - 2p^2 = 0$.

Donc le nombre $1 + 2 + \dots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

b. $n^2 + n - 2p^2 = 0 \iff 4n^2 + 4n - 8p^2 = 0 \iff 4n^2 + 4n + 1 - 8p^2 = 1 \iff (2n+1)^2 - 8p^2 = 1$

Donc le nombre $1 + 2 + \dots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

1. Deux couples solution sont, par exemple, (3; 1) et (1; 0).

2. Soit $(x; y)$ un couple d'entiers relatifs non nuls $(x; y)$ solution de (E).

Soit d un diviseur commun à x et y .

Alors d divise x^2 , y^2 , $8y^2$ et donc d divise $x^2 - 8y^2$ donc d divise 1.

On en déduit que $d = 1$ ou $d = -1$ ce qui veut dire que x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+8y \\ x+3y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = 3x+8y \\ y' = x+3y \end{cases}$

2. La matrice A a un déterminant égal à 1, donc non nul, donc elle admet une matrice inverse A^{-1} .

Pour déterminer A^{-1} on peut chercher la matrice carrée $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre le système de 4

équations à 4 inconnues $A \times A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; enfin il faut vérifier que $A' \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut également déterminer A^{-1} à la calculatrice et on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff A^{-1} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x' - 8y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = 3x' - 8y' \\ y = -x' + 3y' \end{cases} \end{aligned}$$

3. $(x; y)$ est solution de (E) $\iff x^2 - 8y^2 = 1$

$$\iff (3x' - 8y')^2 - 8(-x' + 3y')^2 = 1$$

$$\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) = 1$$

$$\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8x'^2 + 48x'y' - 72y'^2 = 1$$

$$\iff x'^2 - 8y'^2 = 1$$

$$\iff (x'; y') \text{ est solution de (E)}$$

4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Soit \mathcal{P}_n la propriété : $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

- *Initialisation* Pour $n = 0$: $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ donc $x_0^2 - 8y_0^2 = 9 - 8 = 1$ donc $(x_0; y_0)$ est solution de (E).

La propriété est vraie au rang 0.

- *Hérédité* On suppose que la propriété est vraie à un rang p quelconque ($p \geq 0$) c'est-à-dire que $(x_p; y_p)$ est solution de (E) ; c'est l'hypothèse de récurrence.

On veut démontrer que $(x_{p+1}; y_{p+1})$ est solution de (E).

On a vu dans la question précédente que si $(x; y)$ était solution de (E), alors $(x'; y')$ défini par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est aussi solution de (E).}$$

Comme $(x_n; y_n)$ est solution de (E), on peut dire que $(x_{n+1}; y_{n+1})$ est solution de (E) puisque

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ Donc la propriété est vraie au rang } p + 1.$$

- La propriété est vraie au rang 0; elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n , le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

On cherche un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

- On cherche n entier naturel tel que : $1 + 2 + 3 + \dots + n \geq 2015$.

$$\text{Ce qui équivaut à } \frac{n(n+1)}{2} \geq 2015 \iff n^2 + n - 4030 \geq 0.$$

$$\text{L'équation } x^2 + x - 4030 = 0 \text{ a pour solutions } \frac{-1 - 2\sqrt{329}}{2} \approx -63,98 \text{ et } \frac{-1 + 2\sqrt{329}}{2} \approx 62,98.$$

Pour que le nombre triangulaire soit supérieur à 2015, il faut que $n \geq 63$.

- Dans la partie A on a vu qu'un nombre triangulaire $1 + 2 + \dots + n$ était un carré si et seulement s'il existait un entier p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

- Dans la partie C on a déterminé une suite de couples $(x_n; y_n)$ qui étaient tous solutions de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$.

- On va donc chercher $n \geq 63$ tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$; si $n \geq 63$, alors $2n+1 \geq 127$.

Ce qui revient à chercher les couples $(x_n; y_n)$ solutions de (E) avec $x_n \geq 127$.

- En partant de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en multipliant successivement par la matrice A , on trouve comme solutions

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 577 \\ 204 \end{pmatrix} \dots$$

- $577 = 2 \times 288 + 1$ donc un nombre triangulaire supérieur à 2015 est $1 + 2 + 3 + \dots + 288 = \frac{288 \times 289}{2} = 41616$.

- On peut vérifier que $41616 = 204^2$ (résultat en conformité avec la question A. 2. a.).