Corrigé du baccalauréat S Asie 19 juin 2014

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 - c.
On peut éliminer rapidement les réponses **a.** et **d.** car les vecteurs directeurs des droites proposées ne sont pas colinéaires au vecteur $\vec{u}$.
La représentation paramétrique donnée en **c.** est une droite qui contient le point A pour la valeur $t = -1$.

Question 2 - c.

Le plus efficace pour répondre à cette question est de résoudre le système $\left\{\begin{array}{r c l} x &=& 1+t\\ y &=& -3-t\\ z &=& 2-2t\\ 2x+y-z+5 &=& 0\end{array}\right.$

qui donne $-\dfrac{2}{3}$ comme valeur à t et qui conduit au point E.

Question 3 - d.
On appelle $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
On montre successivement que $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ ce qui prouve que les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles. Or A $\notin \mathcal{P}$ donc les plans sont strictement parallèles.

Question 4 - a.
On utilise l'expression du produit scalaire :
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} \iff 12 = \sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos\widehat{BAC}$
donc $\cos\widehat{BAC} \approx 0{,}925\,8$ ce qui correspond à 22,2°.

Exercice 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française ; cette variable suit la loi normale de moyenne $\mu = 45{,}5$ et d'écart type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45{,}5}{\sigma}$.

1. **a.** D'après le cours, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, d'espérance 0 et d'écart type 1.

   b. D'après le cours, si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ,
   $P(X \leqslant \mu) = 0{,}5$.
   Cela résulte de la symétrie de la courbe de Gauss autour de la droite d'équation $x = \mu$.

2. En prenant $\sigma = 3{,}8$, $\mu - 2\sigma = 45{,}5 - 2 \times 3{,}8 = 37{,}9$ et $\mu + 2\sigma = 45{,}5 + 2 \times 3{,}8 = 53{,}1$.
   Or on sait que si la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ :
   $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ donc $P(37{,}9 \leqslant X \leqslant 53{,}1) \approx 0{,}95$.

Partie B

On définit les évènements :

M **:** « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S **:** « l'individu a plus de 50 ans » ;

H **:** « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

1. **a.** On sait que 90 % des porteurs de la maladie V ont plus de 50 ans donc $P_M(S) = 0{,}9$.
   $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0{,}01 \times 0{,}9 = 0{,}009$.

   b. La probabilité qu'un individu ayant plus de 50 ans soit porteur de la maladie V est $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)}$.
   On sait que 30 % de la population a plus de 50 ans, donc $P(S) = 0{,}3$.
   On déduit : $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}009}{0{,}3} = 0{,}03$.

2. **a.** $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leqslant \alpha) = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$

   b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α (évènement $\overline{H}$) ; la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est $P_{\overline{H}}(M)$.
   $P_{\overline{H}}(M) = \dfrac{P(M \cap \overline{H})}{P(\overline{H})}$
   On sait que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V, donc $P_H(M) = 0{,}6$. On en déduit que $P(H \cap M) = P(H) \times P_H(M) = 0{,}05 \times 0{,}6 = 0{,}003$.
   D'après la formule des probabilités totales, $P(M) = P(M \cap H) + P(M \cap \overline{H})$ donc $P(M \cap \overline{H}) = P(M) - P(M \cap H) = 0{,}01 - 0{,}003 = 0{,}007$.
   $P_{\overline{H}}(M) = \dfrac{P(M \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \dfrac{0{,}007}{0{,}995} \approx 0{,}007$.
   La probabilité qu'un individu soir porteur de la maladie sachant qu'il a un taux d'hématocrite inférieur ou égale à α est de 0,007.

Partie C

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence p de la maladie V dans un échantillon de taille n est : $I = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
   $p = P(M) = 0{,}01$ et $n = 1\,000$ donc :
   $I = \left[0{,}01 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}01 \times 0{,}99}}{\sqrt{1\,000}}\,;\, 0{,}01 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}01 \times 0{,}99}}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0{,}003\,;\, 0{,}017]$
2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V donc $f = \dfrac{14}{1\,000} = 0{,}014$.

   Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % donc l'échantillon étudié peut être considéré comme « normal » ; on peut conclure que le gène ne semble pas avoir d'influence sur la maladie.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie sur $[-1\,;\,1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$ où a est un réel strictement positif.
On définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1) \times 2\,e^{2x} - 1 = (2x-1)\,e^{2x} - 1$
   $f'(0) = -e^0 - 1 = -2$
   $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty}(2x-1)\,e^{2x} = +\infty$$
   $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$
2. $f''(x) = 2 \times e^{2x} + (2x-1) \times 2\,e^{2x} = (2 + 4x - 2)\,e^{2x} = 4x\,e^{2x}$
3. • Pour tout x, $e^{2x} > 0$ donc la fonction f'' est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$, et donc la fonction f' est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

- La fonction f' est continue $[0\,;\,+\infty[$.
- $f'(0) = -2 < 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$; on appelle x_0 cette solution.

On aurait pu également établir le tableau de variations de la fonction f'.

4. **a.** D'après la question précédente :

- $f'(x) < 0$ sur $[0\,;\,x_0[$ donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,x_0]$;
- $f'(x) > 0$ sur $]x_0\,;\,+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[x_0\,;\,+\infty[$.

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \times \mathrm{e}^0 - 1 = -2 < 0 \\ f \text{ est décroissante sur } [0\,;\,x_0] \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) < 0 \text{ pour tout } x \in [0\,;\,x_0] \Longrightarrow f(x_0) < 0$

b. $f(2) = 1 \times \mathrm{e}^4 - 1 - 2 = \mathrm{e}^4 - 3 \approx 51{,}6 > 0$

- La fonction f est strictement croissante sur $[x_0\,;\,+\infty[$.
- La fonction f est continue sur $[x_0\,;\,+\infty[$.
- $f(x_0) < 0$
- $f(2) = \mathrm{e}^4 - 3 > 0$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[x_0\,;\,2]$.

$f(2) > 0$ et f est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

Comme $f(x) < 0$ sur $[0\,;\,x_0]$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[0\,;\,x_0]$.

On peut donc dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[x_0\,;\,2]$; on l'appelle a.

En utilisant la calculatrice, on trouve $a \approx 1{,}20$.

Pour déterminer une valeur approchée de x_0 à la calculatrice, on peut programmer la fonction f et utiliser le tableau de valeurs, ou utiliser le `solveur` si la calculatrice en possède un.

5. On admet que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression $L = \displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)\mathrm{d}x$.

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ où $\alpha \neq 0$ a pour primitive $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$ donc la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + \dfrac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a}$ soit $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}\right)$.

$L = \displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}\right)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}\right)\right] - \left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{0}\right)\right] =$
$\dfrac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}\right) \quad = \dfrac{1}{1{,}2}\left(\mathrm{e}^{1{,}2} - \mathrm{e}^{-1{,}2}\right) \approx 2{,}52$

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Pour n de $\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^n}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit le nombre I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$, $1 + x^n > 0$ donc $f_n(x) > 0$.

Donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

D'après le graphique, cette aire tend à se rapprocher de 1 quand n tend vers $+\infty$.

2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3. **a.** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0;1]$:

$0 \leqslant x^n \leqslant 1 \iff 1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{1+x^n} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b. Pour tout x de $[0;1]$, $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \iff I_n \leqslant [x]_0^1 \iff I_n \leqslant 1$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x, $(x^n)^2 \geqslant 0$ donc $1-(x^n)^2 \leqslant 1$ ce qui équivaut à $(1-x^n)(1+x^n) \leqslant 1$ et comme $1+x^n > 0$ pour $x \in [0;1]$: $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^n\right)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - 0 = \frac{n}{n+1}$

6. On a vu que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout réel x de $[0;1]$, $1-x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$. D'après la positivité de l'intégration, on peut en déduire que $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $\dfrac{n}{n+1} \leqslant I_n$.

On a vu aussi que pour tout n, $I_n \leqslant 1$. Donc, pour tout n, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$.

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ ce qui équivaut à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

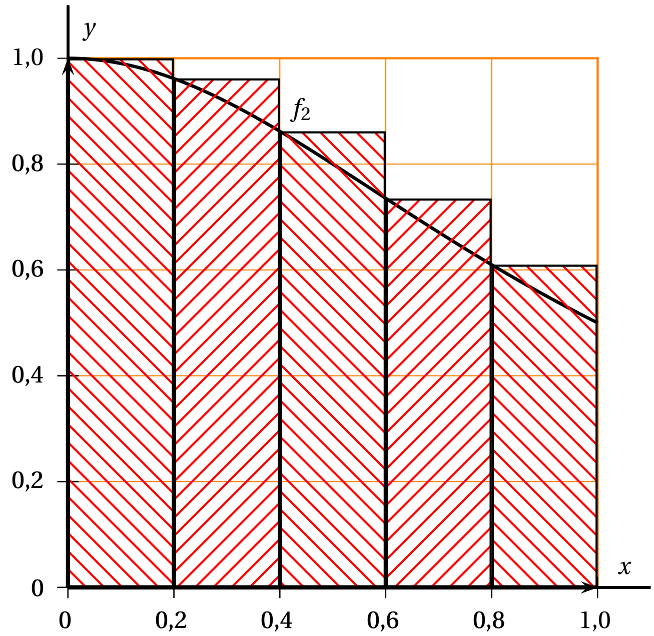
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

7. **a.** On fait tourner l'algorithme proposé avec $n = 2$ et $p = 5$:

k	x	I
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

La valeur de I arrondie au centième qui sera affichée est 0,83.

b. Il faut reconnaitre dans l'algorithme proposé la méthode des rectangles permettant de calculer des valeurs approchées d'aire sous une courbe ; plus précisément, comme la fonction f_n est décroissante sur $[0;1]$, on obtient la somme de rectangles majorant l'intégrale I_n cherchée.



Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \dots, p_n$. On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :
   $E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$.
   Le nombre 2 est premier donc il est dans la liste $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ donc le produit de ces nombres premiers est supérieur ou égal à 2 et donc E est supérieur ou égal à 2.
   Soit i un entier de l'intervalle $[\![1\,;\,n]\!]$.
   Le reste de la division de E par p_i est 1; donc E n'est pas divisible par p_i. Comme p_i est un nombre premier, et que E n'est pas divisible par p_i, alors E et p_i sont premiers entre eux.
   Donc E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.
2. Tout nombre supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier, donc E admet un diviseur premier. Ce diviseur premier ne peut être ni p_1, ni p_2, ni ..., ni p_n; donc il existe un autre nombre premier qui n'est ni p_1, ni p_2, ni ..., ni p_n, ce qui contredit l'hypothèse faite au départ.
   Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$. On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. **a.** On calcule M_k pour quelques valeurs de k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

   b. Pour $k = 2$ premier, $M_2 = 3$ est premier. Pour $k = 3$ premier, $M_3 = 7$ est premier. Pour $k = 5$ premier, $M_5 = 31$ est premier. Pour $k = 7$ premier, $M_7 = 127$ est premier.
   D'après ce tableau, on peut conjecturer que si k est premier, alors M_k est premier.
2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

   a. $1 + 2^p + + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1}$ est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2^P ; cette somme est égale à :

$$\text{premier terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} = 1 \times \dfrac{1-(2^p)^q}{1-2^p} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$

b. Le nombre $1+2^p++(2^p)^2+(2^p)^3+\cdots(2^p)^{q-1}$ est entier et, d'après la question précédente, $\left(1+2^p++(2^p)^2+(2^p)^3+\cdots(2^p)^{q-1}\right)\times(2^p-1)=2^{pq}-1$ donc $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1.

c. Soit k un nombre non premier ; alors il existe deux entiers strictement plus grands que 1 tels que $k=pq$.
$M_k = 2^k-1 = 2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 qui est strictement plus grand que 1 : donc M_k n'est pas premier.

3. a. $M_{11} = 2^{11}-1 = 2\,047 = 23\times 89$ donc M_{11} n'est pas premier.

b. La conjecture de la question **1.b.** est donc fausse : 11 et premier et M_{11} ne l'est pas.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$

1. D'après le test de Lucas-Lehmer, M_5 est premier si et seulement si $u_3 \equiv 0$ modulo M_5.
$M_5 = 31$; $u_0 = 4$; $u_1 = u_0^2-2 = 14$; $u_2 = u_1^2-2 = 194$; $u_3 = u_2^2-2 = 37\,634 = 31\times 1\,214$
Donc u_3 est divisible par M_5 donc le test de Lucas-Lehmer est vérifié pour $k=5$.

2. L'algorithme suivant permet de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer :

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur 2^n-1
	Pour i allant de 1 à $n-2$ faire
	u prend la valeur u^2-2
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M est premier »
	sinon afficher « M n'est pas premier »