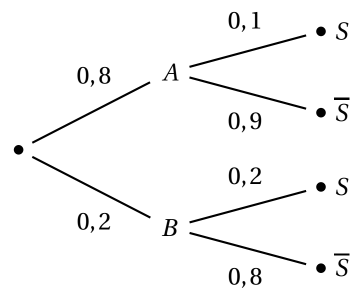
Corrigé du baccalauréat S Asie 18 juin 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. a. En suivant la quatrième branche :

$p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = 0,2 \times 0,8 = 0,16.$

b. On calcule de même :

$p\left(A \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72.$

$\{A\ ;\ B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc :

$p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,72 + 0,16 = 0,88.$

3. Il faut donc calculer :

$p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)}.$

On a vu que $p\left(\overline{S}\right) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p\left(\overline{S}\right) = 0,12.$

Donc $p_S(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ au centième près.

Partie B

1. On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à $0,88$. C'est une épreuve de Bernoulli.

Répéter de façon indépendante 10 fois cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,88)$.

2. Il faut trouver $p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} = 0,88^{10} \approx 0,28$ au centième près.

3. Il faut trouver :

$p(X \geqslant 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) =$

$\binom{10}{8} \times 0,88^{8} \times (1 - 0,88)^{10-8} + \binom{10}{9} \times 0,88^{9} \times (1 - 0,88)^{10-9} + \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} \approx$

$0{,}233\,043 + 0{,}379\,774 + 0{,}278\,501 \approx 0{,}891\,318 \approx 0,89$ au centième près

Partie C

1. On vérifie tout d'abord que :
   - $n = 50$ et $50 \geqslant 30$;
   - $np = 50 \times 0,88 = 44$ et $44 \geqslant 5$;
   - $n(1-p) = 50 \times 0,12 = 6$ et $6 \geqslant 5$.

   On sait qu'alors l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est égale à :
   $\mathrm{I}_f = \left[0,88 - \dfrac{1,96 \times \sqrt{0,88 \times (1-0,88)}}{\sqrt{50}}\ ;\ 0,88 + \dfrac{1,96 \times \sqrt{0,88 \times (1-0,88)}}{\sqrt{50}}\right]$, d'où au centième près :
   $\mathrm{I}_f = [0,79\ ;\ 0,98]$.
2. L'inspecteur de la brigade de répression constate une proportion de lots sans pesticides de $\dfrac{50-12}{50} \approx 0,76$. Or $0,76 \notin \mathrm{I}_f$, donc il doit constater au risque de 5 % que la publicité est mensongère.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Voir la figure.

Partie B

1. **a.** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f'(a) = \mathrm{e}^a$.

   b. De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$, donc $g'(b) = \mathrm{e}^{-b}$.

   c. Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :
   $f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $a = -b \iff b = -a$.
2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :
   $y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x-a) \iff y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1-a)$.
   Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :
   $y - \left(1-\mathrm{e}^{-b}\right) = \mathrm{e}^{-b}(x-b) \iff y = x\mathrm{e}^{-b} + 1 - \mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b}$.
   Ou en remplaçant $-b$ par a :
   $y = x\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a \iff y = x\mathrm{e}^a + 1 + \mathrm{e}^a(a-1)$.
   Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :
   $\mathrm{e}^a(1-a) = 1 + \mathrm{e}^a(a-1) \iff \mathrm{e}^a(2-2a) = 1 \iff 2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$.
   Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

1. **a.** Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x\text{e}^x - \text{e}^x + 1$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\text{e}^x = 0$, d'où par somme de limite :
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1$.

   La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ.

   On a $\lim\limits_{x to +\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

   b. Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $\varphi'(x) = 2\text{e}^x + 2(x-1)\text{e}^x = 2x\text{e}^x$.

   Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $\text{e}^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x. Donc sur $]-\infty\,;\,0[$, $\varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0\,;\,+\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

   c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a.** Sur $]-\infty\,;\,0]$ la fonction φ est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[-1\,;\,1]$. Comme $0 \in [-1\,;\,1]$ il existe un réel unique α de $]-\infty\,;\,0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   Le même raisonnement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.

   Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

   b. La calculatrice donne successivement :
   $\varphi(-2) \approx 0,18$ et $\varphi(-1) \approx -0,47$, donc $-2 < \alpha < -1$;
   $\varphi(-1,7) \approx 0,013$ et $\varphi(-1,6) \approx -0,05$, donc $-1,7 < \alpha < -1,6$;
   $\varphi(-1,68) \approx 0,001$ et $\varphi(-1,67) \approx -0,005$, donc $-1,68 < \alpha < -1,67$;
   $\varphi(-1,679) \approx 0,00041$ et $\varphi(-1,678) \approx -0,0002$, donc $-1,679 < \alpha < -1,678$.
   Conclusion au centième près $\alpha \approx -1,68$.
   De la même façon on obtient $\beta \approx 0,77$.

Partie D

1. Le coefficient directeur de la tangente en E à $\mathscr{C}_f$ est e^{α}.

   Le coefficient directeur de la droite (EF) est : $\dfrac{1 - \text{e}^{\alpha} - \text{e}^{\alpha}}{-\alpha - \alpha} = \dfrac{1 - 2\text{e}^{\alpha}}{-2\alpha}$.

   Or α est solution de l'équation : $2(x-1)\text{e}^x + 1 = 0$, autrement dit
   $2(\alpha - 1)\text{e}^{\alpha} + 1 = 0 \iff 2\alpha\text{e}^{\alpha} = 2\text{e}^{\alpha} - 1$, d'où en revenant au coefficient directeur de la droite (EF) : $\dfrac{1 - 2\text{e}^{\alpha}}{-2\alpha} = \dfrac{-2\alpha\text{e}^{\alpha}}{-2\alpha} = \text{e}^{\alpha}$

   Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $\text{e}^{-(-\alpha)} = \text{e}^{\alpha}$.

   On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^{α} et contient le point F.

   Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. **Affirmation 1** : VRAIE
On a $\overrightarrow{\text{AB}}\left(-\sqrt{3}-2\,;\,-1\right)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\left(-1\,;\,\sqrt{3}-2\right)$.
D'où $\overrightarrow{\text{AC}} = \left(2-\sqrt{3}\right)\overrightarrow{\text{AB}}$.
Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : FAUSSE
On calcule successivement :
$\text{EB}^2 = 8$; $\text{EC}^2 = 8$ et $\text{ED}^2 = \dfrac{19}{4} + 2\sqrt{3} \neq 8$.
Les points B, C et D ne sont pas équidistants de E.
3. **Affirmation 3** : VRAIE
Une équation du plan (IJK) est $x+y+z=1$. Un point commun à ce plan et à la droite $\mathcal{D}$ a ses coordonnées telles que :
$2-t+6-2t-2+t=1 \iff 5=2t \iff t=\dfrac{5}{2}$.
Ce point commun existe donc et a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
4. **Affirmation 4** : VRAIE
(EFGH) est un carré donc le milieu T de [HF] est le milieu de [EG].
On a donc $\overrightarrow{\text{ET}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EG}}$.
En prenant par exemple le repère $\left(\text{A},\ \overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ calculons le produit scalaire :
$\overrightarrow{\text{AT}}\cdot\overrightarrow{\text{EC}} = \left(\overrightarrow{\text{AE}}+\overrightarrow{\text{ET}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{EG}}+\overrightarrow{\text{GC}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AE}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EG}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{EG}}+\overrightarrow{\text{GC}}\right) =$
$\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{EG}}+\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{GC}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EG}}\cdot\overrightarrow{\text{EG}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EG}}\cdot\overrightarrow{\text{GC}}$.
Or ABCDEFGH est un cube, donc $\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{EG}}=0$ et $\overrightarrow{\text{EG}}\cdot\overrightarrow{\text{GC}}=0$.
De plus $\overrightarrow{\text{AE}} = -\overrightarrow{\text{GC}}$ et $\text{EG} = c\sqrt{2}$, c étant la mesure du côté du cube.
Finalement : $\overrightarrow{\text{AT}}\cdot\overrightarrow{\text{EC}} = -c^2+\dfrac{1}{2}\left(c\sqrt{2}\right)^2 = -c^2+c^2=0$.
Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : supposons que pour tout naturel p tel que $u_p > 1$.
$\dfrac{1+3u_p}{3+u_p} = \dfrac{3+u_p-2+2u_p}{3+u_p} = \dfrac{\left(3+u_p\right)+\left(2u_p-2\right)}{3+u_p} = 1+2\dfrac{u_p-1}{3+u_p}$.
Par hypothèse de récurrence on a :
u_p-1 et comme $u_p>1$, $3+u_p>4>0$ donc son inverse $\dfrac{1}{3+u_p}>0$ et finalement $\dfrac{u_p-1}{3+u_p}>0$,
c'est-à-dire que $u_{p+1} = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n>1$.

2. **a.** Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b. On sait que quel que soit le naturel n, $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1-u_n^2 < 0$ et comme $3+u_n > 0$ et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. **a.** $V_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1} = \dfrac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} = \dfrac{-0,5(u_n-1)}{1,5(u_n+1)} = -\dfrac{1}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$.

   On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. **a.** Quel que soit le naturel n, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

   b. $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \iff v_n(u_n+1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff$
   $v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n(v_n-1) = -1-v_n$ et comme $v_n \neq 1$,
   $u_n = \dfrac{-1-v_n}{v_n-1} = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   c. Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **a.** On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{E'} &=& \frac{5}{4}\times 2 + \frac{3}{4}\times 2 \\ y_{E'} &=& \frac{3}{4}\times 2 + \frac{5}{4}\times 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{E'} &=& 4 \\ y_{E'} &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{F'} &=& \frac{5}{4}\times(-1) + \frac{3}{4}\times 5 \\ y_{F'} &=& \frac{3}{4}\times(-1) + \frac{5}{4}\times 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{F'} &=& \frac{5}{2} \\ y_{F'} &=& \frac{11}{2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{G'} &=& \frac{5}{4}\times(-3) + \frac{3}{4}\times 3 \\ y_{G'} &=& \frac{3}{4}\times(-3) + \frac{5}{4}\times 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{G'} &=& -\frac{3}{2} \\ y_{G'} &=& \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

   b. $OE^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $OE = 2\sqrt{2}$.
   $OE'^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, donc $OE' = 4\sqrt{2}$. Donc $OE' = 2OE$.
   $OG^2 = (-3)^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$, donc $OG = 3\sqrt{2}$;

$\text{OG}'^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4}$, donc $\text{OG}' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Donc $\text{OG}' = \dfrac{1}{2}\text{OG}$.

On a $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Partie B

1. Il suffit d'écrire avant le FIN POUR : afficher x, afficher y

2. Il semble que les cordonnées sont de plus en plus grandes tout en se rapprochant (les points images sont de plus en plus proches de la droite $y = x$.)

Partie C

1. *Initialisation* : pour $n = 1$, on a bien $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ et :

$\alpha_1 = 2^0 + \frac{1}{2^2}$ et $\beta_1 = 2^0 - \frac{1}{2^2}$.

Hérédité : supposons que pour tout naturel p tel que : $A^p = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}$ et

$$\alpha_p = 2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}} \quad \text{et} \quad \beta_p = 2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

La relation $A^{p+1} = A \times A^p$ entraîne que :

$\alpha_{p+1} = \frac{5}{4}\alpha_p + \frac{3}{4}\beta_p$ et

$\beta_{p+1} = \frac{3}{4}\alpha_p + \frac{5}{4}\beta_p$, soit en utilisant la relation de récurrence :

$\alpha_{p+1} = \frac{5}{4}\left(2^{p-1} + \dfrac{1}{2^{p+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{p-1} - \dfrac{1}{2^{p+1}}\right) = \frac{8}{4}2^{p-1} + \frac{2}{4}\dfrac{1}{2^{p+1}} = 2^p + \dfrac{1}{2^{p+2}}$.

De même :

$\beta_{p+1} = \frac{3}{4}\left(2^{p-1} + \dfrac{1}{2^{p+1}}\right) + \frac{5}{4}\left(2^{p-1} - \dfrac{1}{2^{p+1}}\right) = \dfrac{8}{4}2^{p-1} - \dfrac{2}{4}\dfrac{1}{2^{p+1}} = 2^p - \dfrac{1}{2^{p+2}}$.

Donc les relations sont vraies au rang $p + 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. a. L'égalité

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

se traduit par :

$\begin{cases} x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n \\ y_n = 2\beta_n + 2\alpha_n \end{cases}$

On a quel que soit le naturel n, $x_n = y_n$.

b. $\text{OE}_n^2 = x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2$;

Avec $x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n = 2\left(\alpha_n + \beta_n\right)$ et $\alpha_n + \beta_n = 2^n$, on obtient

$\text{OE}_n^2 = 2 \times 4\left(2^n\right)^2 = 2^{2n+3}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{2n+3} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \text{OE}_n = +\infty$.

Annexe

à rendre avec la copie

Exercice 2