Baccalauréat S Asie 21 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

1.

$$(\forall x \in]0\ ;\ +\infty[) \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

a. La limite de la fonction f en 0 est $-\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0\ ;\ x>0}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0\ ;\ x>0}(\ln(x)) = -\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.

En $+\infty$, la limite de la fonction f est 0 (voir le cours).

b. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\times(1-\ln(x))$.

c. $f'(x)$ est du signe de $(1-\ln(x))$ sur $]0\ ;\ +\infty[$,
or sur $]0\ ;\ +\infty[$;
$1-\ln(x) > 0 \iff x < \mathrm{e}$; $\quad 1-\ln(x) < 0 \iff x > \mathrm{e}$; $\quad 1-\ln(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a. La limite de g en 0 est $+\infty$ car $g(x) = f(x)\times\ln(x)$ or ,
$\displaystyle\lim_{x\to 0\ ;\ x>0}\ln(x) = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to 0\ ;\ x>0} f(x) = -\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.
La limite de g en $+\infty$ est 0 car :

$$4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln(x))^2}{x} = g(x).$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(g(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^2\right) = 0$ car $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln(X)}{X}\right) = 0$; on a posé $X = \sqrt{x}$ et X tend vers $+\infty$ quand $x$tend vers $+\infty$.

b. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\times\left(2\ln(x) - (\ln(x))^2\right) = \dfrac{1}{x^2}\times(2-\ln(x))\times\ln(x)$,

donc $g'(x)$ s'annule si et seulement si $\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 2$ donc pour $x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^2$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	||	−	0			+	
$(2-\ln(x))$	||	+		+	0	−	
$g'(x)$	||	−	0	+	0	−	

c.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3. **a.** Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points dont les abscisses sont les solutions $f(x) = g(x)$
$f(x) = g(x) \iff \ln(x) = (\ln(x))^2 \iff 0 = (\ln(x))^2 - \ln(x) \iff 0 = \ln(x) \times (\ln(x) - 1) \iff$
$\ln(x) = 0$, ou $\ln(x) = 1 \iff x = 1$, ou $x = \text{e}$
ce sont les deux points $A(1~;~0)$; $B\left(\text{e}~;~\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

b. La position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$est donnée par l'étude du signe de $f(x) - g(x)$.
$f(x) - g(x) < 0 \iff \ln(x) < (\ln(x))^2 \iff \ln(x)(1 - \ln(x)) < 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	0		$+$		
$(1 - \ln(x))$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x) \times (1 - \ln(x))$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x) - g(x) < 0 \iff \ln(x) < 0$ ou $\ln(x) > 1 \iff x < 1$ ou $x > \text{e}$
$f(x) - g(x) > 0 \iff 1 < x < \text{e}$
La courbe de f est au dessus de la courbe de g pour $x \in]1~;~\text{e}[$.
La courbe de f est au dessous de la courbe de g pour $x \in]0~;~1[\cap]\text{e}~;~+\infty[$.
La courbe de f coupe la courbe de g pour $x = 1$ ou pour $x = \text{e}$.

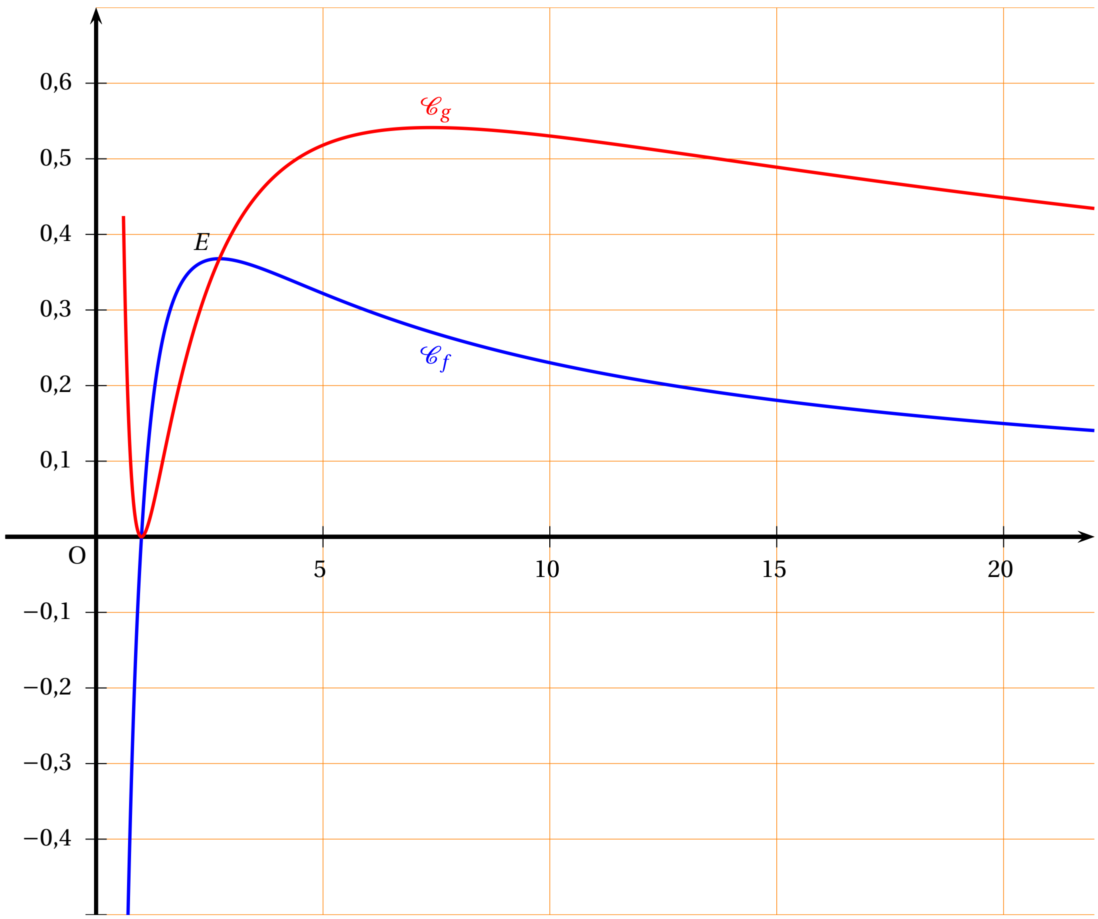
c. On a tracé sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C_g.

4. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\text{e}} (f(x) - g(x))\,\text{d}x$ car sur $[1~;~\text{e}]$, $f(x) \geqslant g(x)$ et f et g sont continues sur cet intervalle.

$$\mathscr{A} = \int_1^{\text{e}} (\frac{\ln(x)}{x})\,\text{d}x - \int_1^{\text{e}} (\frac{(\ln(x))^2}{x}) dx = [\frac{(\ln(x))^2}{2} - \frac{(\ln(x))^3}{3}]_1^{\text{e}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(pour trouver les primitives, on a reconnu la forme $u^n \times u'$ avec $u : x \mapsto u(x) = \ln(x)$ et $u' : x \mapsto u'(x) = \frac{1}{x}$ et pour la première intégrale $n = 1$ c'est $u \times u'$ et pour la deuxième $n = 2$ c'est $u^2 \times u'$; et si $n \neq -1$, alors $u^n \times u'$ a pour primitive $x \mapsto \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.

Annexe 1 (exercice 1)



EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

La figure est donnée en **annexe 2**.

1. L'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\left(z - z_A\right) + z_A$.
   Donc $z' = \text{i}z + 2\text{i} - 2$.
   Le point J a pour affixe $\text{i}z_B - 2 + 2\text{i} = -5 - 2 + 2\text{i} = -7 + 2\text{i}$.
   On admettra que l'affixe du point K est - 2 - 6i.
2. Les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{JC}}}{z_{\overrightarrow{BK}}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.

   Les segments $[BK]$ et $[JC]$ ont la même longueur si et seulement si $\left|\dfrac{z_{JC}}{z_{BK}}\right| = 1$

   Calculons $\dfrac{z_{\overrightarrow{JC}}}{z_{\overrightarrow{BK}}}$ c'est $\dfrac{4 + 7 - 2\text{i}}{-2 - 6\text{i} - 5\text{i}} = \dfrac{11 - 2\text{i}}{-2 - 11\text{i}} = \dfrac{\text{i}(-11\text{i} - 2)}{-2 - 11\text{i}} = \text{i}$.

   Donc en prenant module et argument de i, on prouve ainsi que $\arg(\dfrac{z_{JC}}{z_{BK}}) = \dfrac{\pi}{2}$et que $\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{JC}}}{z_{\overrightarrow{BK}}}\right| = 1$

   donc les segments [BK] et [JC] ont la même longueur et sont perpendiculaires.
   La longueur de $[BK]$ égale la longueur de $[JC]$ égale $\sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125}$.
3. **a.** Le point S est le milieu de $[JB]$ donc si on note z_S l'affixe de S, $z_S = \dfrac{z_J + z_B}{2} = -3,5 + 3,5\text{i}$.
   Le point T est le milieu de $[KC]$ donc si on note z_T l'affixe de T, $z_T = \dfrac{z_K + z_C}{2} = 1 - 3\text{i}$.

   b. Le point U est le milieu de $[CN]$, or N est obtenu par rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ autour de B du point C, donc $z_N = \text{i}(z_C - z_B) + z_B$donc $z_N = 5 + 9\text{i}$ donc $z_U = \dfrac{5 + 9\text{i} + 4}{2} = 4,5 + 4,5\text{i}$.

   c. Démontrons que la droite (AU) est perpendiculaire à la droite (ST) en calculant un argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{ST}}}$.
   Or $\dfrac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{ST}}} = \dfrac{4,5 + 4,5\text{i} + 2}{1 - 3\text{i} + 3,5 - 3,5\text{i}} = \dfrac{6,5 + 4,5\text{i}}{4,5 - 6,5\text{i}} = \dfrac{\text{i} \times (4,5 - 6,5\text{i})}{4,5 - 6,5\text{i}} = \text{i}$
   donc $(\overrightarrow{ST}\ ;\ \overrightarrow{AU}) = \dfrac{\pi}{2}$, la droite (AU) est perpendiculaire à la droite (ST).
4. Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{AU}}\right)$ est donnée par un argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{JC}}}$.
   Or $\dfrac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{JC}}} = \dfrac{4,5 + 4,5\text{i} + 2}{11 - 2\text{i}} = \dfrac{6,5 + 4,5\text{i}}{11 - 2\text{i}} = \dfrac{(6,5 + 4,5\text{i}) \times (11 + 2\text{i})}{125} = \dfrac{(13 + 9\text{i}) \times (11 + 2\text{i})}{250} =$
   $\dfrac{(143 - 18) + \text{i} \times (99 + 26)}{250} = \dfrac{125 + 125\text{i}}{250} = \dfrac{1 + \text{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$, donc l'angle $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{AU}}\right)$ vaut $\dfrac{\pi}{4}$ à $2k\pi$ près
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe
   $v = -0,752 + 0,864\text{i}$
   (en fait $x = -0,752$ et $y = 0,864$ s'obtiennent en résolvant le système donné par les deux équations des droites(BK) et (JC) d'équations respectives : $y = \dfrac{11}{2}x + 5$ et $y = \dfrac{-2}{11}(x - 4)$).

   a. $z_{\overrightarrow{AV}} = 2 - 0,752 + 0,864\text{i} = 1,248 + 0,864\text{i}$.
   $z_{\overrightarrow{AU}} = 6,5 + 4,5\text{i}$.
   Or $1,248 = \dfrac{1248}{1000} = \dfrac{156}{125} = 13 \times \dfrac{12}{125} = 6,5 \times \dfrac{24}{125}$.

$0,864 = \dfrac{864}{1000} = \dfrac{108}{125} = 9 \times \dfrac{12}{125} = 4,5 \times \dfrac{24}{125}$.

Donc $\overrightarrow{AV} = \dfrac{24}{125}\overrightarrow{AU}$ donc A, V, U sont alignés.

b. l'angle $\widehat{\text{BVC}}$ est droit car $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{BK}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ c'est l'angle entre les droites (BK) ; (JC)

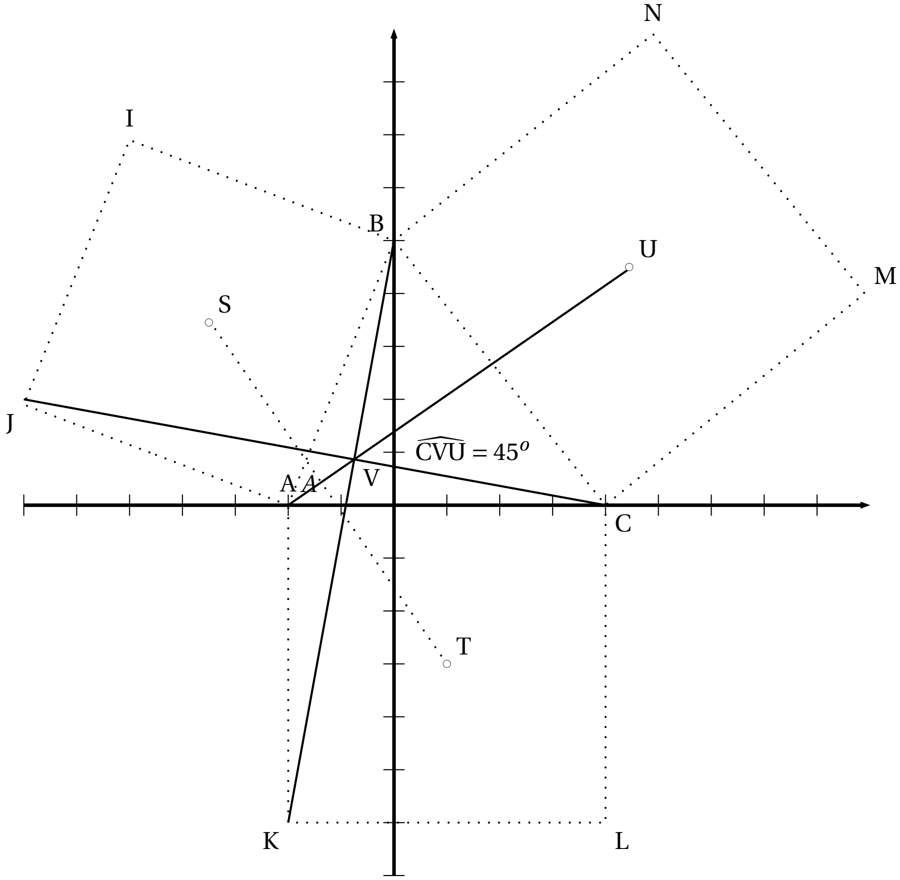
et on sait que l'angle $\widehat{\text{UVC}}$ vaut $\dfrac{\pi}{4}$ car $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{AU}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc comme V est aligné avec J et C et J, V, C sont alignés dans cet ordre

et que A, V, U sont aussi alignés dans cet ordre

$\left(\overrightarrow{\text{VC}}, \overrightarrow{\text{VU}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc la demi-droite $[VU)$est la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BVC}}$.

La droite (AU) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BVC}}$.

Annexe 2 (exercice 2)



EXERCICE 3 **5 points**

1. **a.** Une représentation paramétrique de la droite (EC) c'est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_E + t \times x_{\overrightarrow{EC}} \\ (\ y &=& y_E + t\times y_{\overrightarrow{EC}} \quad t\in\mathbb{R} \\ z &=& z_E + t\times z_{\overrightarrow{EC}} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \\ y &=& 0+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$$

car $E(1\,;0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

b. Une équation cartésienne du plan (AFH) est de la forme

$ax+by+cz+d=0$, avec $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan donc normal à $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FH}$ or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

donc avec le produit scalaire de $\overrightarrow{N}$ et de $\overrightarrow{AF}$: $b+c=0$

donc avec le produit scalaire de $\overrightarrow{N}$ et de $\overrightarrow{HF}$: $a+b=0$;

donc $c=-b; a=-b$ donc $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}-b\\b\\-b\end{pmatrix}$, tous les vecteurs $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{N_{-1}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc l'équation du plan (AFH) c'est $x-y+z+d=0$ reste à trouver d, or ce plan passe par $A(1\,;\,0\,;\,0)$ donc $1+d=0$ donc $d=-1$, (AFH) a pour équation $x-y+z-1=0$

c. Les coordonnées du point I sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \\ y &=& 0+t \\ z &=& 1-t \\ 1-t-t+1-t &=& 1 \end{array}\right., \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} t &=& \frac{1}{3} \\ x &=& \frac{2}{3} \\ y &=& \frac{1}{3} \\ z &=& \frac{2}{3} \end{array}\right. \text{ puis comme } \overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}-1\end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{EI}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{N_{-1}}$ et vu que $I\in(AFH)$, le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. La distance du point E au plan (AFH) est égale à $EI=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(on peut aussi calculer cette distance avec la formule$d(E\,;\,(AFH))=\dfrac{\mid ax_E+by_E+cz_E+d\mid}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ c'est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

e. La droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{HI}$ et de $\overrightarrow{AF}$ est nul,

or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$, on fait le produit scalaire on trouve $\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}=0$ donc

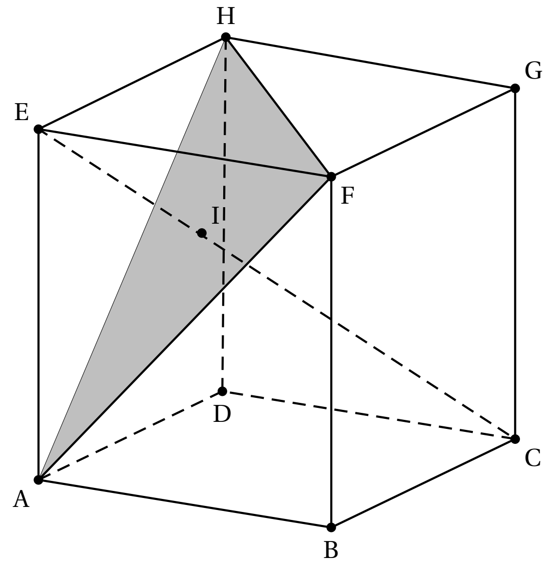
La droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

Le point I est dans le plan du triangle AFH et la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) donc (HI) est l'une des hauteurs du triangle AFH, pour prouver que I est l'orthocentre du triangle AFH prouvons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (HF), on fait le produit scalaire de $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ on trouve $\frac{-1}{3}+\frac{1}{3}=0$;

I est l'orthocentre du triangle AFH et comme ce triangle est équilatéral de côté de longueur $\sqrt{2}$, le point I est point de rencontre de « toutes les droites »du triangle AFH

2. Le triangle AFH est équilatéral de côté $\sqrt{2}$ donc son aire (formule $\mathscr{A}(ABC) = \frac{ab\sin(C)}{2}$) donc $\dfrac{(\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ or l'aire de AEH c'est celle d'une demi face du cube c'est $\dfrac{1}{2}$ donc le tétraèdre est ni de type 1 ni de type 3. Reste à voir s'il est de type 2 or par exemple $\overrightarrow{EA}$ s'écrit $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IA}$, et l'arête opposée à $[EA]$ c'est $[HF]$ et $\overrightarrow{EI}$ est orthogonal à toute la face (AFH) donc $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{HF}$ car (AI) est l'une des hauteurs du triangle AFH donc $[EA]$ et $[HF]$ sont orthogonales et il en de même avec les deux autres couples d'arêtes :([EF]et[AH])et($[EH]$ et $[AF]$)

le tétraèdre EAFH est dit de type 2 car les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Rappel :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\,;\,t]) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

b. $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

c. $p([a\,;\,b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

• Montrons que $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$

$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{p([t\,;\,+\infty[\cap[t\,;\,t+s])}{p([t\,;\,+\infty[)}$ $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{p([t\,;\,t+s])}{p([t\,;\,+\infty[)}$ $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{p([0\,;\,t+s]) - p([0\,;\,t[)}{1 - p([0;t[)}$

or $p([a\,;\,b]) = F(b) - F(a) = p([0;b]) - p([0;a]) = p(]a;b])$ donc que l'intervalle soit fermé ou ouvert, la probabilité ne change pas.

$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{p([0\,;\,t+s]) - p([0\,;\,t])}{1-p([0;t])} p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$.

• Enfin montrons que :$p_{[t\,;\,+\infty]}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

$$F(t) = [\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^t$$

$$F(t) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

donc

$$p_{[t\,;\,+\infty[)}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)} - (1-\mathrm{e}^{-\lambda t})}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

donc

$$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

$$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda s}$$

$$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = p([0\,;\,s])$$

$p_{[t\,;\,+\infty]}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. La probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à
$p(]2\,;\,+\infty[) = 1 - p([0\,;\,2]) = 1 - F(2)$
$p(]2\,;\,+\infty[) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4}$.

3. « Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans »
on cherche

$$p_{[2\,;\,+\infty[}([6\,;\,+\infty[) = 1 - p_{[2\,;\,+\infty[}([0;6])$$

$$p_{[2\,;\,+\infty[}([6\,;\,+\infty[) = 1 - p_{[2\,;\,+\infty[}([0;6])$$

$$p_{[2\,;\,+\infty[}([6\,;\,+\infty[) = 1 - p_{[2\,;\,+\infty[}([2;6])$$

$$p_{[2\,;\,+\infty[}([6\,;\,+\infty[) = 1 - p_{[2\,;\,+\infty[}([2\,;\,2+4]) = 1 - p([0\,;\,4]) = \mathrm{e}^{-0,2\times 4} = \mathrm{e}^{-0,8}$$

(on a utilisé la R.O.C. avec $t = 2$ et $s = 4$)

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.
Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

a. La probabilité que pour un capteur, il ne tombe pas en panne au cours des deux premières années c'est $p = \mathrm{e}^{-0,4}$ (ceci est la probabilité qu'un capteur fonctionne encore après deux ans), or les 10 capteurs fonctionnent de manière indépendante, donc le nombre de capteurs encore en marche au bout de deux ans suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10\,;\,\mathrm{e}^{-0,4}\right)$, la probabilité qu'il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au bout de 2 ans est
$\binom{10}{2} \times (\mathrm{e}^{-0,4})^2 \times (1-\mathrm{e}^{-0,4})^8 \simeq 0,000\,035$.

b. La probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années, donc il y ait au moins un capteur en marche au bout de 2 ans, notons là $p(B)$.
$\overline{B}$ « tous les capteurs tombent en panne au cours des deux premières années », de probabilité $(1-\mathrm{e}^{-0,4})^{10}$
donc la probabilité demandée est $(1-(1-\mathrm{e}^{-0,4})^{10}) \simeq 0,999\,985$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

   On raisonne par récurrence :

   $\mathscr{P}$ est la proposition : « soit n un entier supérieur ou égal à 2, pour tous les entiers k entre 2 et n (sens large) k se décompose en produit de facteurs premiers. »

   Initialisation : $n = 2$ alors les entiers k de 2 à 2, en fait il n'y a que $k = 2$; 2 se décompose en produit de facteurs premiers :2 = 2.

   Donc la proposition est vraie pour $n = 2$.

   Hérédité : soit $n \geqslant 2$ quelconque tel que pour tous les entiers k entre 2 et n (sens large) k se décompose en produit de facteurs premiers; est ce que pour $n+1$: pour tous les entiers k entre 2 et $n+1$ (sens large) k se décompose en produit de facteurs premiers?

   Il suffit de montrer que $n+1$ se décompose en produit de facteurs premiers.

   Si $n+1$ est un nombre premier alors $n+1 = n+1$ il est ainsi décomposé en produit de facteurs premiers.

   Si $n+1$ n'est pas premier , alors $n+1 = a \times b$ avec a premier selon le prérequis, et a et b sont deux diviseurs de $(n+1)$ donc sont plus petits que $(n+1)$;

   a premier $\Longrightarrow a \neq (n+1)$ donc $b \neq 1$

   et $b \neq (n+1)$ sinon $a = 1$ ce qui est faux donc b est un entier entre 2 et n on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence donc b se décompose en produit de facteurs premiers : on peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ et $p_1 ; p_2 \cdots p_m$ nombres premiers en ordre croissant strictement, on peut trouver $\alpha_1 ; \alpha_2 \cdots ; \alpha_m$ entiers naturels tels que : $b = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_m^{\alpha_m}$ donc $(n+1) = a \times p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_m^{\alpha_m}$, on a ainsi décomposé $(n+1)$ en produit de facteurs premiers , l'hérédité est prouvée.

   Conclusion : la proposition est vraie au rang 2 et si elle est vraie pour un rang supérieur ou égal à 2, elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence pour tout entier n au moins égal à 2 : pour tous les entiers k entre 2 et n (sens large) k se décompose en produit de facteurs premiers.

   En particulier : n se décompose en produit de facteurs premiers.

2. 629 est divisible par 17 car $629 = 289 + 340$, donc

   $629 = 17 \times (17+20)$ donc $629 = 17 \times 37$ c'est là sa décomposition en facteurs premiers..

Partie B

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives :
$\Gamma : z = xy$ et $C : x^2 + z^2 = 1$.

1. La nature de la surface C : c'est le cylindre d'axe (Oy) de rayon 1 (on voit bien que si $(x_0 ; z_0)$ vérifient $x_0^2 + z_0^2 = 1$ alors quelque soit y dans $\mathbb{R}$, le point $M(x_0 ; y ; z_0)$ est aussi sur C ; C est la réunion de droites parallèles à (Oy) et ces droites coupent (xOz) selon le cercle de centre O de rayon 1.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C

   a. Les coordonnées $(x ; y ; z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que :
   $z = xy$ et $x^2 + (yx)^2 = 1$ donc

   $$x^2\left(1+y^2\right) = 1.$$

   b. Les points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs de Γ et C sont tels que $x^2 = 1$ et $1 + y^2 = 1$ car si 1 est le produit de deux nombres naturels , alors chacun d'eux vaut 1 donc $x^2 = 1$ et $y^2 = 0$ et$z = xy$ finalement les deux triplets solutions sont $(1 ; 0 ; 0)$ et $(-1 ; 0 ; 0)$.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. L'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs vérifient $z = 1 + 4$ et $z = x \times y$.

Or $5 = x \times y \iff ((|x|,|y|) = (1~;~5)$et $xy > 0)$ ou $((|x|,|y|) = (5;1)$ et $xy > 0$

donc vu que $z = 5$, il y a quatre triplets solutions

$(5~;1~;~5)$; $(1~;~5~;~5)$; $(-5~;~-1~;5)$; $(-1~;~-5~;~5)$

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.

b. $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = [(n^2 + 2) - 2n] \times [(n^2 + 2) + 2n]$

$\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$

$\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$

$\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = n^4 + 4.$

c. On a montré ci dessus que $n^4 + 4$ est le produit de deux entiers (chaque parenthèse est un entier), pour montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier si $n \geqslant 2$, il suffit de montrer que aucun de ces entiers n'est égal à 1

or le plus grand des deux facteurs c'est $\left(n^2 + 2n + 2\right)$ il est positif donc l'autre aussi (leur produit c'est $(n^4 + 4)$)et c'est le plus petit, montrons que

$(n \geq 2) \Longrightarrow (n^2 - 2n + 2) > 1$

or cela revient à dire que $(n^2 - 2n + 1) > 0$ donc que $(n - 1)^2 > 0$ or cela est vrai car $(n \geqslant 2) \Longrightarrow (n - 1) \geqslant 1$

deux nombres positifs sont dans le même ordre que leur carrés :

$(n \geqslant 2) \Longrightarrow (n - 1)^2 \geqslant 1^2$

$(n \geqslant 2) \Longrightarrow (n^2 - 2n + 2) \geqslant 2$

Quel que soit le nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d. Donc on vient de trouver deux diviseurs de $(n^4 + 4)$, il y a aussi 1 et $n^4 + 4$; donc on a ainsi quatre diviseurs positifs distincts de $(n^4 + 4)$ cela donne quatre valeurs pour x associées à quatre valeurs de y pour que le produit égal $(n^4 + 4)$ ensuite on prend les opposés pour x et pour y cela fait bien 8 points a coordonnées entières qui sont dans $\Gamma \cap P_n$, citons ces 8 triplets de coordonnées :

$((n^2 - 2n + 2)~;~(n^2 + 2n + 2)~;~n^4 + 4)$; $((n^2 + 2n + 2)~;~(n^2 - 2n + 2)~;~n^4 + 4)$;

$(-(n^2 - 2n + 2)~;~-(n^2 + 2n + 2); n^4 + 4)$; $(-(n^2 + 2n + 2)~;~-(n^2 - 2n + 2)~;~n^4 + 4)$;

$(n^4 + 4~;~1~;~n^4 + 4)$; $(1~;~n^4 + 4~;~n^4 + 4)$;

$(-(n^4 + 4)~;~-1~;~n^4 + 4)$; $(-1~;~-(n^4 + 4)~;~n^4 + 4)$.

e. Les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs sont tels que $z = 625 + 4 = 629$ et $xy = 629$ or $629 = 17 \times 37$ c'est sa décomposition en facteurs premiers donc il admet 4 diviseurs positifs c'est tout : 17 ; 37 ; 1 ; 629. Donc on a ici 4 valeurs pour x et comme précédemment on trouve cette fois ci exactement 8 points d'intersection

(remarque $n^2 - 2n + 2 = 25 - 10 + 2 = 17$; $n^2 + 2n + 2 = 25 + 10 + 2 = 37$)

Leurs coordonnées sont : $(17~;~37~;~629)$; $(37~;~17~;~629)$; $(-17~;~-37~;~629)$;$(-37~;~-17~;629)$;

$(1~;~629~;~629)$; $(-1~;~-629~;~629)$; $(629~;~1~;~629)$; $(-629~;~-1~;~629)$