Durée : 4 heures

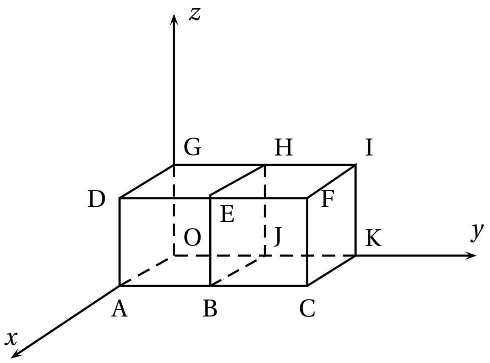
∾ Baccalauréat S Asie 21 juin 2010 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(1; 2; 0), D(1; 0; 1), E(1; 1; 1), F(1; 2; 1), G(0; 0; 1), H(0; 1; 1), I(0; 2; 1), J(O; 1; 0), K(0; 2; 0) comme indiqués sur la figure ci -contre :



1. Question 1 : Le triangle GBI est :

   Réponse **a** : isocèle. Réponse **b** : équilatéral. Réponse **c** : rectangle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés $\{(\text{O}, 2), (\text{A}, -1), (\text{C}, 1)\}$ est :

   Réponse **a** : le point K. Réponse **b** : le point I. Réponse **c** : le point J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{FC}}$ est égal à :

   Réponse **a** : 1. Réponse **b** : -1. Réponse **c** : 2.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

   Réponse a : sont non coplanaires.
   Réponse b : forment un rectangle.
   Réponse c : forment un carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

   Réponse a : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t\\ y &=& 2+t\\ z &=& t \end{array}\right.$.

   Réponse b : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 3+4t\\ y &=& t\\ z &=& 4t \end{array}\right.$.

   Réponse c : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t \end{array}\right.$.

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

   Réponse a : $2x+2y-z-2=0$.
   Réponse b : $x+y-3=0$.
   Réponse c : $x+y+2z=2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse **a** : $\sqrt{2}$. Réponse **b** : 2. Réponse **c** : $\frac{1}{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse **a** : $\frac{1}{2}$. Réponse **b** : $\frac{1}{6}$. Réponse **c** : $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}, \quad c = 3 + 3\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad p = 10.$$

PARTIE A Étude de la configuration

1. Construction de la figure.

  a. Placer les points A et P dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

  b. Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

  c. Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3. On note r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

  a. Vérifier que l'image Q du point C par r_A a pour affixe : $q = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$.

  b. Vérifier l'égalité : $q = -2b$.
  Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.

  a. Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

  b. Établir que : AP = BQ = CR.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = M\text{A} + M\text{B} + M\text{C}.$$

1. Calculer $f(\text{O})$.

2. Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_A.
Démontrer que : $M\text{A} = MN$ puis que $M\text{C} = N\text{Q}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan,
$f(M) \geqslant 12$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points B, C et H d'affixes respectives :

$$b = 5\text{i},\quad c = 10\quad \text{et}\quad h = 2+4\text{i}.$$

Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Étude de la position du point H

a. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).

b. Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que $\left(\overrightarrow{\text{HC}}\,;\,\overrightarrow{\text{HA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

2. Étude d'une première similitude

a. Calculer les rapports : $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}}$, $\dfrac{\text{BA}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AH}}{\text{CH}}$.

b. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

c. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Étude d'une seconde similitude

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation

On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (-1-2\text{i})\overline{z}+10.$$

Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ). Préciser (Δ).

4. Étude d'une composée

a. Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.

b. En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

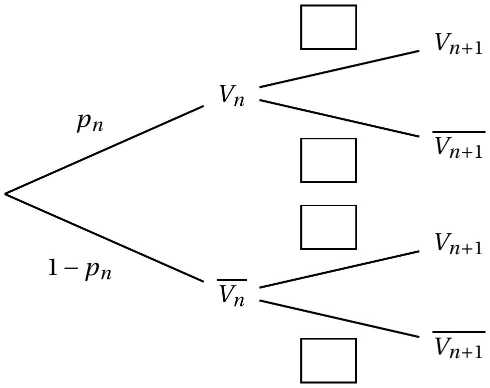
a. A : « les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sondages sont positifs »;

b. B : « les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3$^{\text{e}}$ sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Étude des variations de la fonction f

a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = \text{e} - \frac{\sqrt{\text{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

b. Calculer I_3.

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n

a. Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$, on a :
$0 \leqslant \dfrac{1}{x^n}\text{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{\text{e}}{x^n}$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).