Corrigé du baccalauréat S Asie 21 juin 2010

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Question 1 : Le triangle GBI est :

   Réponse **a** : isocèle. Réponse **b** : équilatéral. Réponse **c** : rectangle.
   On a $\text{GB}^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \text{GB} = \sqrt{3}$; de même $\text{BI} = \sqrt{3}$ et $\text{GI} = 2$. Le triangle GBI est isocèle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, -1), (C, 1)} est :

   Réponse **a** : le point K. Réponse **b** : le point I. Réponse **c** : le point J.
   Par définition le barycentre G vérifie : $2\overrightarrow{\text{GO}} - \overrightarrow{\text{GA}} + \overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{\text{OG}} = \overrightarrow{\text{AC}} \iff \overrightarrow{\text{OG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{OJ}} \Rightarrow$

   G = J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{FC}}$ est égal à :

   Réponse **a** : 1. Réponse **b** : -1. Réponse **c** : 2.
   Avec $\overrightarrow{\text{AH}}(-1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\text{FC}}(0\,;\,0\,;\,-1)$, $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{FC}} = -1$.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

   Réponse **a** : sont non coplanaires. Réponse **b** : forment un rectangle. Réponse **c** : forment un carré.
   On a $\text{BC} = \text{HI} = 1$ et $\text{CI} = \text{BH} = \sqrt{2}$. Ces points sont coplanaires (ils appartiennent au plan d'équation $x + z = 1$), donc BCIH est un parallélogramme. Or $\overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{CI}} = 0 + 0 + 0 = 0$. Le parallélogramme a un angle droit : c'est un rectangle.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

   On a $\overrightarrow{\text{KE}}(1\,;\,-1\,;\,1)$. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{KE}) \iff \overrightarrow{\text{KM}} = u\overrightarrow{\text{KE}}, u \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcr} x-0 &=& u\\ y-2 &=& -u\\ z-0 &=& u\end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& u\\ y &=& 2-u\\ z &=& u\end{array}\right.$

   En posant $t = 1 - u \iff u = 1 - t$, on obtient

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{KE}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

   Réponse **a** : $2x + 2y - z - 2 = 0$. Réponse **b** : $x + y - 3 = 0$. Réponse **c** : $x + y + 2z = 2$.
   Les coordonnées de G, B et K ne vérifient que l'équation $x + y + 2z = 2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

   Réponse **a** : $\sqrt{2}$. Réponse **b** : 2. Réponse **c** : $\frac{1}{2}$.
   Une équation du plan (ADH) est $x + y - 1 = 0$. Donc $d(\text{C, ADH}) = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse **a** : $\frac{1}{2}$. Réponse **b** : $\frac{1}{6}$. Réponse **c** : $\frac{1}{3}$.

On prend comme base BJK dont l'aire est $\frac{1}{2}$, comme hauteur HJ = 1, d'où un volume égal à $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A Étude de la configuration

1. Construction de la figure.

a. Cf. figure.

b. On a $|b|^2 = 2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12 = 16 = 4^2$. Donc $|b| = 4$.

De même $|c|^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 27 = 36 = 6^2$. Donc $|c| = 6$.

c. Voir les droites en tiretés.

2. $\text{BC}^2 = 1^2 + 75 = 76$;
$\text{BP}^2 = 64 + 12 = 76$;
$\text{PC}^2 = 49 + 27 = 76$;
Donc $\text{BC}^2 = \text{BP}^2 = \text{PC}^2 = 76 \Rightarrow \text{BC} = \text{BP} = \text{PC} \Rightarrow$ BCP est équilatéral.

• *Autre méthode :* On calcule

$$\frac{b-p}{c-p} = \frac{-8-2\text{i}\sqrt{3}}{-7+3\text{i}\sqrt{3}} = \frac{(-8-2\text{i}\sqrt{3})(-7+3\text{i}\sqrt{3})}{(-7+3\text{i}\sqrt{3})(-7-3\text{i}\sqrt{3})} = \frac{56-18+24\text{i}\sqrt{3}+14\text{i}\sqrt{3}}{49+27} = \frac{38+38\text{i}\sqrt{3}}{76} = \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}.$$

On a donc d'une part :
$\left|\frac{b-p}{c-p}\right| = \left|\text{e}^{\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = 1$, ce qui signifie $\frac{\text{PC}}{\text{BP}} = 1$, donc PC = BP : le triangle BPC est isocèle en P,
d'autre part :
$\arg\left(\frac{b-p}{c-p}\right) = \arg\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Conclusion BPC est isocèle en P et l'angle en P a pour mesure $\frac{\pi}{3}$; les deux autres angles ont donc eux aussi pour mesure $\frac{\pi}{3}$ et le triangle BPC est équilatéral.

3. a. On a par définition de la rotation q étant l'affixe de Q :

$$q - a = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-a) \iff q = a + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-a) = -2 + \left(5 + 3\text{i}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$-2 + \frac{5}{2} - \frac{9}{2} + \frac{5\text{i}\sqrt{3}}{2} + \frac{3\text{i}\sqrt{3}}{2} = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}.$$

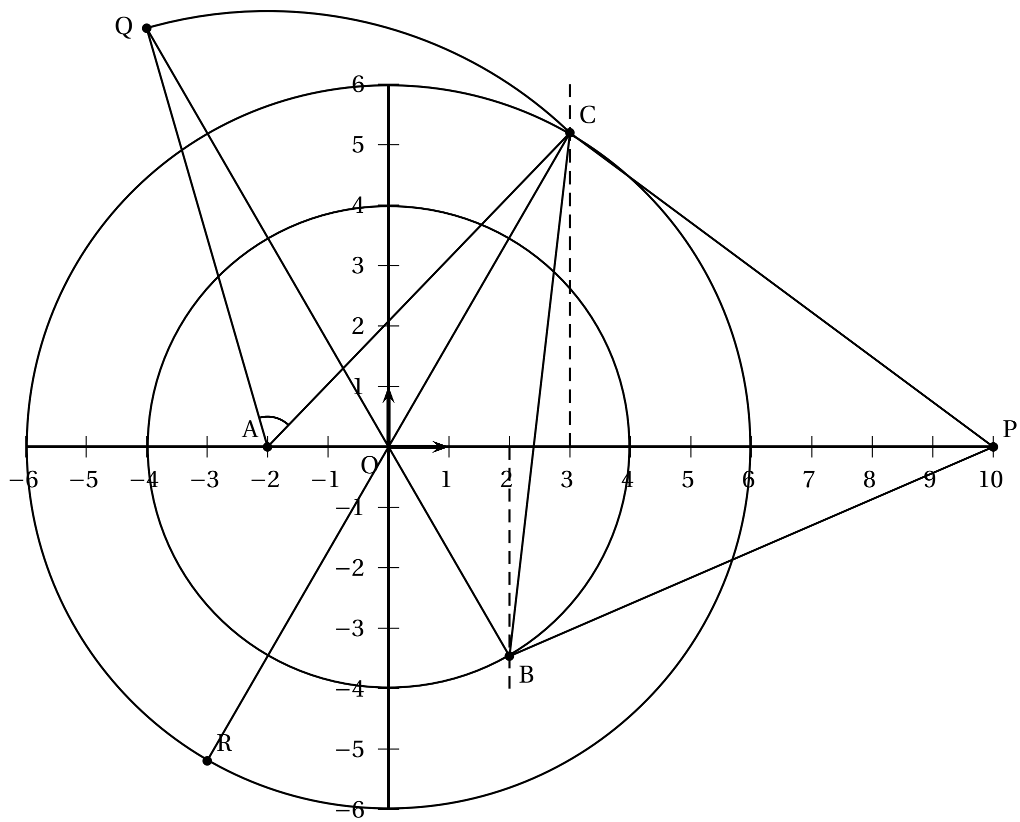
b. On a $q = -4 + 4\text{i}\sqrt{3} = -2\left(2 - 2\text{i}\sqrt{3}\right) = -2b$.

On a donc $\overrightarrow{\text{OQ}} = -2\overrightarrow{\text{OB}}$ ce qui signifie que les vecteurs sont colinéaires ou encore les points O, Q et B sont alignés.

4. a. Par définition O, C et R sont alignés ; on vient de démontrer que O, Q et B sont alignés et A, O et P sont sur l'axe des réels.

Conclusion : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b.



PARTIE B

1. $f(\text{O}) = \text{OA} + \text{OB} + \text{OC} = |a| + |b| + |c| = 2 + 4 + 6 = 12$.
2. Par définition de la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, un point M, son image N et le centre A sont les sommets d'un triangle équilatéral. Donc $M\text{A} = MN$.
   D'autre part M et C ayant pour images respectives par l'isométrie r_{A} les points N et Q, on a $M\text{C} = N\text{Q}$.
3. $f(M) = M\text{A} + M\text{B} + M\text{C} = MN + M\text{B} + M\text{C}$ d'après la question précédente,
   $f(M) \geqslant \text{B}N + M\text{C}$, d'après l'inégalité triangulaire dans BMN,
   $f(M) \geqslant \text{B}N + N\text{Q}$ d'après la question précédente,
   $f(M) \geqslant \text{BQ}$ d'après l'inégalité triangulaire dans BNQ.
   Or B, O et Q étant alignés : BQ = BO + OQ = 4 + 8 = 12 et finalement

$$f(M) \geqslant 12.$$

Conclusion : d'après la question précédente on voit donc que le point qui minimise la somme des distances d'un point du plan aux trois sommets du triangle ABC, est le point O, cette somme des distances étant égale à 12.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{BC}}(10\ ;\ -5)$ et $\overrightarrow{\text{BH}}(2\ ;\ -1)$, donc $\overrightarrow{\text{BC}} = 5\overrightarrow{\text{BH}}$: ces vecteurs sont colinéaires, donc B, C et H sont alignés.

   b. $\dfrac{h}{h-c} = \dfrac{2+4\text{i}}{-8+4\text{i}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1+2\text{i}}{-2+\text{i}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+2\text{i})(-2-\text{i})}{(-2+\text{i})(-2-\text{i})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{-2+2-\text{i}-4\text{i}}{4+1} = \dfrac{1}{2}\times(-\text{i})$.

   On a donc $\arg\left(\dfrac{h}{h-c}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \iff \left(\overrightarrow{\text{CH}},\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \iff \left(\overrightarrow{\text{HC}}, \overrightarrow{\text{HA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

2. **a.** La question précédente montre que dans le triangle rectangle ABC, [AH] est la hauteur issue de A.

   $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}} = \dfrac{\left|\overrightarrow{\text{BH}}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{AH}}\right|}$.

   Or $\text{BH}^2 = 4+1 = 5 \Rightarrow \text{BH} = \sqrt{5}$ et $\text{AH}^2 = 4+16 = 20 \Rightarrow \text{AH} = 2\sqrt{5}$.

   Donc $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$.

   Ba $= 5$ et AC $= 10$, donc $\dfrac{\text{BA}}{\text{AC}} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

   Enfin comme $\text{CH}^2 = 64+16 = 80 \Rightarrow \text{CH} = 4\sqrt{5}$, on a $\dfrac{\text{AH}}{\text{CH}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$.

   Conclusion : $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{BA}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{AH}}{\text{CH}} = \dfrac{1}{2}$.

   b. La question précédente montre que les côtés du triangle BAH sont deux fois plus petits que ceux de BCA. Comme $\left(\overrightarrow{\text{HC}},\ \overrightarrow{\text{HA}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{HA}},\ \overrightarrow{\text{HB}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, la similitude (directe) S_1 de centre H et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

   c. On sait que l'écriture complexe de cette similitude est, z étant l'affixe d'un point M et z' celle de son image par S_1 est

   $$z' - z_{\text{H}} = \frac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{-\pi}{2}}\left(z - z_{\text{H}}\right) \iff z' = 2+4\text{i} - \frac{1}{2}\text{i}(z-2-4\text{i}) \iff z' = -\frac{1}{2}\text{i}z + 5\text{i}.$$

   Éléments caractéristiques : centre H, rapport $\dfrac{1}{2}$ et angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. Cherchons le(s) point(s) fixe(s) de cette similitude.

   Avec $z = x+\text{i}y$, $z' = x'+\text{i}y' = x+\text{i}y = (-1-2\text{i})(x-\text{i}y)+10 \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& -x-2y+10\\ y &=& -2x+y\end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{l c l} 2x &=& -2y+10\\ 2x &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} y &=& 5\\ x &=& 0\end{array}\right.$

   Le seul point fixe a pour affixe 5i : c'est B.

   S_2 doit donc être la composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) contenant B et d'une similitude de centre B.

   - La symétrie orthogonale a une écriture complexe de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$ avec $|\alpha| = 1$.

   Or B est invariant par cette symétrie : $5\text{i} = \alpha 5\text{i} + \beta \iff \beta = 5\text{i}(\alpha+1)$.

   L'écriture complexe de la symétrie est donc : $z' = \alpha\overline{z} + 5\text{i}(\alpha+1)$.

   En posant $\alpha = a+\text{i}b$, (avec $a^2+b^2 = 1$, les points $M(x\ ;\ y)$ invariants par cette symétrie vérifient :

   $x+\text{i}y = (a+\text{i}b)(x-\text{i}y)+5\text{i}(1+a+\text{i}b)$, d'où

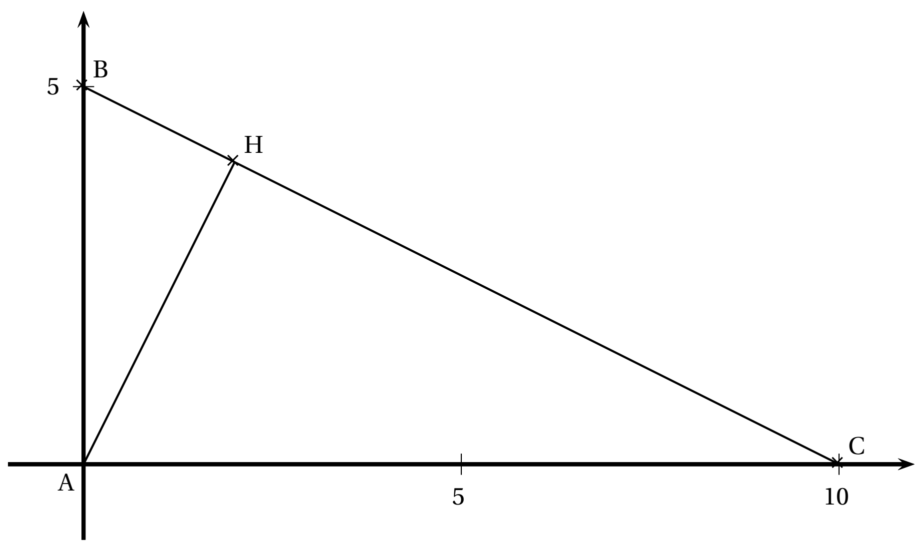
   $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& ax+by-5b\\ y &=& -ay+bx+5(1+a)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x(a-1)+by-5b &=& 0\\ bx-y(a+1)+5(1+a) &=& 0\end{array}\right.$

Ces deux équations sont deux équations d'une même droite (Δ) : elles contiennent toutes les deux le point B$(0\,;\,5)$ et coupent respectivement l'axe des abscisses en $x = -\dfrac{5b}{1-a}$ et $x = -\dfrac{5(a+1)}{b}$. Or $-\dfrac{5b}{1-a} = -\dfrac{5b(1+a)}{(1+a)(1-a)} = -\dfrac{5b(1+a)}{1-a^2} = -\dfrac{5b(1+a)}{b^2} = -\dfrac{5(1+a)}{b}$.

4. Étude d'une composée

a. Le rapport de la similitude $S_2 \circ S_1$ est égal au produit des rapports des deux similitudes, soit $\sqrt{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b. Les points C, H, A ont pour images respectives par $S_2 \circ S_1$ les points B, A, C, donc le triangle CHA a pour image le triangle BAC. Dans cette similitude les aires sont multipliées par le carré du rapport de similitude soit $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} = 1,25$.



EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}((V_3) = 0,6$, donc $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

b. B : On a $p(V_2) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.

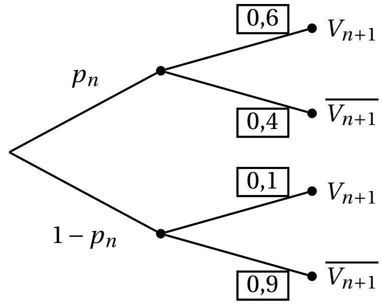
Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

2. On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.

Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

Conclusion : $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$.

3.



4. On a (ce que l'on peut voir sur l'arbre) :

$p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right) = p_n \times 0,6 + (1-p_n) \times 0,1 = 0,6p_n - 0,1p_n + 0,1 = 0,5p_n + 0,1$.

5. **a.** Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.

Cette égalité montre que la suite u est une suite géométrique de raison $0,5$; son premier terme est $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

b. On sait que pour tout entier naturel n non nul $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0,8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

De la définition de u_n il résulte que $p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

c. On sait que $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ entraîne que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{0,8}{2^{n-1}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,2$.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Étude des limites

a. • $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$;

• $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,

donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. La première limite montre que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

La seconde montre que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. Étude des variations de la fonction f

a. $f(x)$ étant considéré comme un produit de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, on a :

$f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2x}{x^4} + \dfrac{1}{x^4}\right) = -\dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.

b. On a $x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow 2x+1 > 1 > 0$; d'autre part quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u > 0$. Enfin $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^4} > 0$, donc finalement pour tout réel supérieur à zéro,

$f'(x) < 0$.

Il en résulte que la fonction f est décroissante sur $]0~;~+\infty[$ de plus l'infini à zéro d'après la première question.

c. D'après le résultat précédent (décroissance de f de plus l'infini à zéro sur $]0\ ;\ +\infty[$), la fonction f continue car dérivable sur cet intervalle il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne :
$f(1,1) \approx 2,05$ et $f(1,2) \approx 1,60$ donc $1,1 < \alpha < 1,2$;
$f(1,10) \approx 2,05$ et $f(1,11) \approx 1,99$ donc $1,10 < \alpha < 1,11$.
La valeur approchée au centième de α est donc $1,11$.

3. Voir plus bas

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

1. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

La fonction à intégrer est donc de la forme $-u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ qui est la dérivée de $-\mathrm{e}^{u(x)}$.

On a donc $I_2 = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$.

2. Une relation de récurrence

a. • *Méthode* 1 : $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u'(x) = \dfrac{1}{x^n}$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; d'où

$u(x) = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Toutes les fonctions sont dérivables, donc continues sur $]0\ ;\ +\infty[$: on peut donc intégrer par parties :

$I_n = \left[-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x =$

$\dfrac{1}{n-1}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{n-1}I_{n+1}$.

Puis $(n-1)I_n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - I_{n+1} \iff I_{n+1} = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

• *Méthode* 2 : une autre intégration par parties :

On pose $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $\quad v(x) = -\dfrac{1}{x^{n-1}}$; d'où :

$u(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $\quad v'(x) = \dfrac{n-1}{x^n}$.

Donc $I_{n+1}(x) = \left[-\dfrac{1}{x^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{(n-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} + \mathrm{e} + (1-n)I_n = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}}$.

b. La relation de récurrence précédente permet de calculer :

$I_3 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} - \left(\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

3. a. Soit x tel que :

$0 < 1 \leqslant x \leqslant 2$, donc en passant aux inverses : $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, puis par croissance de la fonction exponentielle :

$< \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \mathrm{e}^1$, d'où en particulier

$0 < \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \mathrm{e}$.

Comme $x^n > 0$ pour tout naturel et tout réel x entre 1 et 2, il résulte que :

$0 \times \dfrac{1}{x^n} < \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^n} \leqslant \mathrm{e}\dfrac{1}{x^n}$. ou encore $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. On en déduit l'encadrement de l'intégrale I_n :

$$\int_1^2 0\,\mathrm{d}x < \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x,$$

soit $0 < I_n \leqslant \mathrm{e}\left[-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}\right]_1^2$

soit finalement $0 < I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, on obtient par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$.

D'après le théorème des « gendarmes » on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$