

❧ **Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane** ❧
septembre 2008

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A :

1. • *Initialisation* : $u_0 = 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13$: vrai ;
- *Hérédité* : soit un naturel n tel que $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$; alors
- $$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$
- la relation est vraie au rang $n+1$.
- La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle est vraie au rang $n+1$; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{5^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2. a. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Par une récurrence immédiate, on a $u_n > 0$, ce qui entraîne que la suite (S_n) est croissante.

- b. D'après la question 1., $S_n = 1 + \frac{12}{5^0} + \dots + 1 + \frac{12}{5^n} = (n+1) \times 1 + \sum_{k=0}^n \frac{12}{5^k} =$

$$(n+1) + 12 \sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k}.$$

Le deuxième terme de la somme précédente est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$, soit avec $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k}$,

$$\frac{1}{5}T_n = \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}} \text{ et par différence } \frac{4}{5}T_n = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \text{ et enfin } T_n = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right).$$

$$D'où $12 \sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k} = 12 \times \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) = 15 \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) = 15 - \frac{3}{5^n}$$$

On a donc :

$$\boxed{S_n = (n+1) + 15 - \frac{3}{5^n} = n + 16 - \frac{3}{5^n}.$$

- c. La limite de la suite est celle de n , donc égale à $+\infty$.

PARTIE B :

Proposition 1 : Fausse : la suite (u_n) de l'exercice ci-dessus est convergente, alors que (S_n) diverge.

Proposition 2 : Fausse : la suite (u_n) de l'exercice ci-dessus est décroissante car la suite de terme général $\frac{1}{5^n}$ l'est et on a vu que la suite (S_n) est croissante.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}, \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. On a $11 = 3 \times 3 + 2$ et $11 = 5 \times 2 + 1$; 11 est donc solution de (S).

2. On a $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ 11 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow$ par différence $n - 11 \equiv 0 \pmod{3}$, qui signifie que $n - 11$ est un multiple de 3.
3. De même $\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{5} \\ 11 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow$ par différence $n - 11 \equiv 0 \pmod{5}$, qui signifie que $n - 11$ est un multiple de 5.
- Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, $n - 11$ est multiple de $3 \times 5 = 15$. D'où $n - 11 = 15k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et enfin $n = 11 + 15k$, $k \in \mathbb{N}$.

PARTIE B :

1. - Application $f : \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- On a donc $z' = ze^{i\frac{\pi}{3}}$: l'application f est donc une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- Application $g : z'' = e^{i\frac{\pi}{5}}z$, donc g est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.
2. a. Comme $A_{n+1} = f(A_n)$, $OA_{n+1} = OA_n$ et $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}) = \frac{\pi}{3}$, le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$, donc un triangle équilatéral.
- b. Les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont équidistants de O, donc sur un cercle de centre O.
- Les triangles OA_nA_{n+1} sont équilatéraux, donc $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est un hexagone régulier de centre O.
3. a. De la même façon les points B_n sont sur le cercle de centre O et rayon $OB_0 = |4e^{-i\frac{\pi}{5}}| = 4$.
- b. D'après la relation de Chasles : $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = (\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}) + (\overrightarrow{OB_{n+1}}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$. (2π)
- c. Les points B_n sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 et les triangles OB_nB_{n+2} sont isocèles d'angle au sommet $\frac{2\pi}{5}$.
- Le polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$ est donc un pentagone régulier de centre O.
4. a. Puisque $a_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{3}}a_n$, (a_n) est une suite géométrique de raison $e^{i\frac{\pi}{3}}$. On a donc $a_n = (e^{i\frac{\pi}{3}})^n a_0 = (e^{ni\frac{\pi}{3}}) \times 2e^{-2i\frac{\pi}{3}} = 2(e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}})$.
- De même, comme $b_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{5}}b_n$, (b_n) est une suite géométrique de raison $e^{i\frac{\pi}{5}}$. On a donc $b_n = (e^{i\frac{\pi}{5}})^n b_0 = (e^{ni\frac{\pi}{5}}) \times 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4(e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}})$.
- b. Les points sont les deux sur l'axe des réels si leurs arguments sont égaux à 0 à π près, c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \frac{(n-2)\pi}{3} \equiv 0 \pmod{\pi} \\ \frac{(n-1)\pi}{5} \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} n-2 \equiv 0 \pmod{3} \\ n-1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

Les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels si n est solution du système (S) ci-dessus, donc si n est de la forme $11 + 15k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3

7 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

1. a. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = 0$. La limite de $f(x)$ est celle de $x + 2$ soit $-\infty$.

b. $f(x) - (x + 2) = -\frac{e^x}{e^x + 3}$ et on a vu que la limite de ce quotient est égale à 0 au voisinage de $-\infty$. Ceci montre que la droite \mathcal{D}_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$.

c. Comme 4, e^x , $e^x + 3$ sont des nombres supérieurs à zéro, $-\frac{e^x}{e^x + 3} < 0$. Ceci montre que la droite \mathcal{D}_1 est sous la courbe \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$.

2. a. f est une somme de quotients de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , le dénominateur ne s'annulant pas : elle est donc dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = 1 + \frac{-4e^x(e^x + 3) + 4e^x \times e^x}{(e^x + 3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x + 3)^2 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} + 9 + 6e^x - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} + 9 - 6e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2}$$

D'où finalement $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

b. On a manifestement $f'(x) \geq 0$.

La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} .

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 3} = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

Il manque sûrement deux questions à cet exercice : la limite en plus l'infini et l'existence d'une deuxième asymptote :

• Limite en $+\infty$: en factorisant e^x on a :

$$\frac{4e^x}{e^x + 3} = \frac{4e^x}{e^x(1 + 3e^{-x})} = \frac{4}{1 + 3e^{-x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 4$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• Asymptote au voisinage de plus l'infini :

$$\text{On a } f(x) - (x - 2) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

Or on a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 4$, donc finalement

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 4 - 4 = 0$, ce qui signifie que la droite \mathcal{D}_4 d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à \mathcal{C} au voisinage de plus l'infini. Voir la figure.

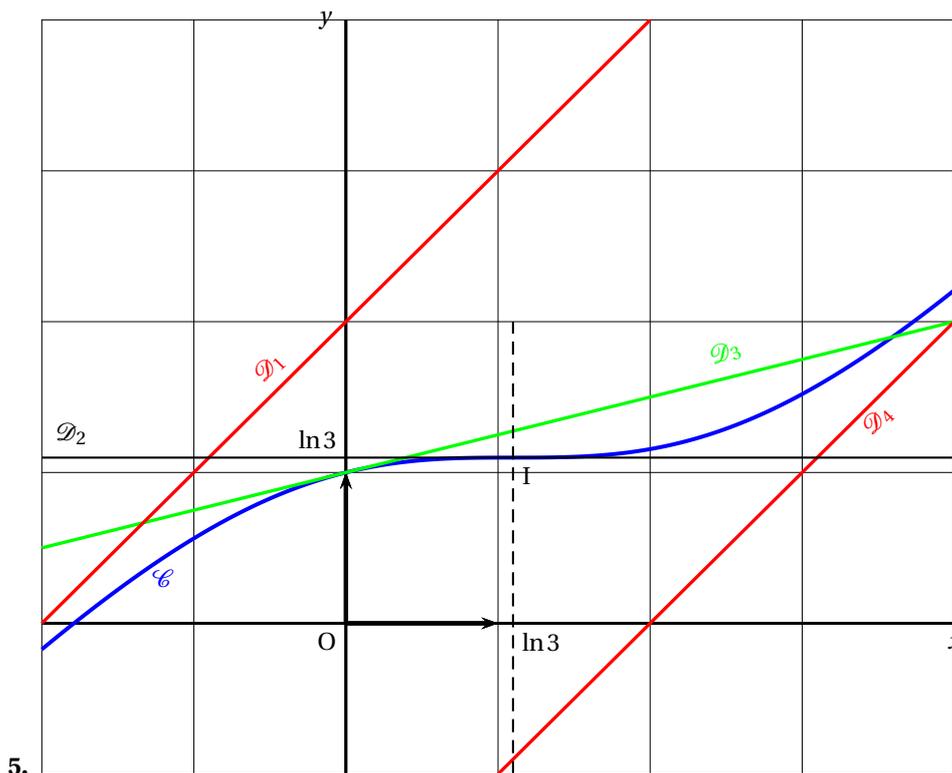
3. a. $f'(x) = 0 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$.

\mathcal{C} a donc une tangente horizontale au point d'abscisse $x = \ln 3$.

$$\text{On a } f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{4 \times 3}{3 + 3} = \ln 3.$$

L'équation de \mathcal{D}_2 est $y = \ln 3 - 2$.

- b.** - Si $x < \ln 3$, alors par croissance de f , $f(x) < f(\ln 3)$. La courbe \mathcal{C} est sous la droite \mathcal{D}_2 .
 - Si $x > \ln 3$, alors par croissance de la fonction f $f(x) > f(\ln 3)$. La courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite \mathcal{D}_2 .
 - Si $x = \ln 3$, alors \mathcal{C} et \mathcal{D}_2 sont tangentes.
- 4. a.** $M(X; Y) \in \mathcal{D}_3 \iff \frac{Y - f(0)}{X - 0} = f'(0) \quad (\text{si } X \neq 0) \iff Y = f(0) + f'(0)X.$
- $$f(0) = 2 - \frac{4}{4} = 1;$$
- $$f'(0) = \left(\frac{-2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$
- $$M(x; y) \in \mathcal{D}_3 \iff y = \frac{1}{4}x + 1$$
- b.** Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right).$
- g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{4};$
- g' est dérivable sur \mathbb{R} et $g''(x) = f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3};$ ce quotient est du signe de $e^x - 3$; le signe de g'' dépend donc de la position de x par rapport à $\ln 3$:
- si $x < \ln 3$, $g''(x) < 0$, ce qui signifie que g' est décroissante;
 - si $x > \ln 3$, $g''(x) > 0$, ce qui signifie que g' est croissante.
- g' admet donc un minimum en $\ln 3$ qui vaut $g'(\ln 3) = f'(\ln 3) - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$
- On remarque que $g'(0) = f'(0) - \frac{1}{4} = \left(\frac{-2}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$
- On en déduit que sur $] -\infty; 0[$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante, puis que sur $]0; \ln 3[$, $g'(x) < 0$, donc g est décroissante.
- g a donc un maximum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = f(0) - 1 = 2 - \frac{4}{4} - 1 = 0.$
- Conclusion : sur l'intervalle $] -\infty; \ln 3[$, la fonction g est négative soit $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right) < 0 \iff f(x) < \left(\frac{1}{4}x + 1\right)$, ce qui signifie que \mathcal{C} est au dessous de \mathcal{D}_3 sur $] -\infty; \ln 3[.$



5.

6. a. Posons $u(x) = e^x + 3$; u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = e^x$.

On a donc $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On sait qu'une primitive de cette fonction est $\ln|u(x)| = \ln u(x)$ (car $u(x) \geq 3 > 0$) = $\ln(e^x + 3)$.

Une primitive G de g sur \mathbb{R} est donc $G(x) = \ln(e^x + 3)$.

b. On a vu que quel que soit x , \mathcal{C} est en dessous de \mathcal{D}_1 , donc l'aire cherchée est :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^0 [(x+2) - f(x)] dx = \int_{\lambda}^0 4 \frac{e^x}{e^x + 3} \quad (\text{d'après la question 1. b.})$$

Donc $\mathcal{A}(\lambda) = G(0) - G(\lambda) = 4 \ln(e^0 + 3) - 4 [\ln(e^\lambda + 3)] = 4 \ln 4 - 4 [\ln(e^\lambda + 3)]$.

c. On a $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^\lambda = 0$, donc $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 4 \ln(e^\lambda + 3) = 4 \ln 3$.

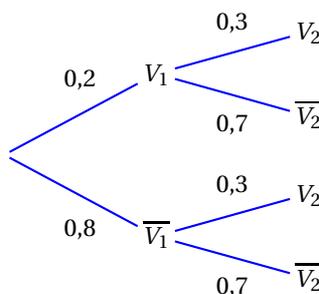
Puis $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln 3 = \ln 4^4 - \ln 3^4 = \ln \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \ln \frac{256}{81} \approx 1,15$ u. a.

EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats

1.



On a de suite $p(V_1) = \frac{2}{10} = 0,2$, $p(\overline{V_1}) = \frac{8}{10} = 0,8$.

$$p(V_2) = \frac{3}{10} = 0,3, \quad p(\overline{V_2}) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

En suivant la première branche, on obtient $p(V_1 \cap V_2) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$.

2. On gagne un ours en peluche si on tire une seule bille verte; donc avec une probabilité de

$$p(V_1 \cap \overline{V_2}) + p(\overline{V_1} \cap V_2) = 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,3 = 0,14 + 0,24 = 0,38.$$

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de gagnants.

On a une épreuve de Bernoulli puisque les parties sont indépendantes avec $n = 20$ et $p = 0,06$.

La probabilité que 2 parmi les 20 gagnent un lecteur MP3 est :

$$p(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0,06^2 \times (1 - 0,06)^{20-2} \approx 0,2246 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

4. Calculons la probabilité qu'aucune de ces n ne gagnent un lecteur MP3; elle est égale à $\binom{n}{0} \times 0,06^0 \times 0,94^n = 0,94^n$.

La probabilité qu'au moins une personne gagne est donc égale à : $p_n = 1 - 0,94^n$.

Or $p_n \geq 0,99 \iff 1 - 0,94^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,94^n$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln 0,01 \geq \ln(0,94^n) \iff \ln\left(\frac{1}{100}\right) \geq n \ln 0,94 \iff$

$$-\ln 100 \geq n \ln(0,94) \iff n \geq \frac{-\ln 100}{\ln 0,94} \text{ car } \ln 0,94 < 0.$$

La calculatrice donne $n \geq 74,5$.

Il faut au moins 75 joueurs pour qu'il y ait au moins un gagnant du lecteur MP3 avec une probabilité de 99 %.