∽ Corrigé du baccalauréat S ∾
Antilles-Guyane 9 septembre 2019

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

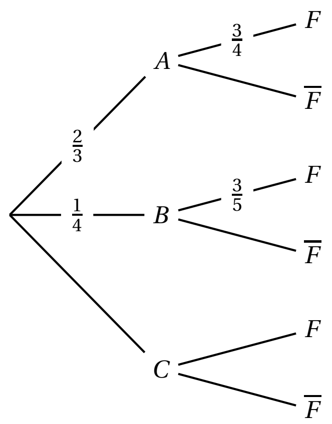
Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier : un panier de petite taille, un panier de taille moyenne, et un panier de grande taille.

Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.
   a. « L'adhérent choisit un panier de petite taille et est intéressé par une livraison d'œufs frais. » est l'événement $A \cap F$: $P(A\cap F) = P(A) \times P_A(F) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   b. $P\left(B\cap\overline{F}\right) = P(B) \times P_B\left(\overline{B}\right) = P(B) \times (1 - P_B(B)) = \dfrac{1}{4} \times \left(1 - \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{1}{10}$
   La probabilité que l'adhérent choisisse un panier de taille moyenne et qu'il ne soit pas intéressé par une livraison d'œufs frais est égale à $\dfrac{1}{10}$.
   c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à 0,6.
   D'après la formule des probabilités totales,
   $P(F) = P(A\cap F) + P(B\cap F) + P(C\cap F) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{5} + P(C\cap F) = 0{,}65 + P(C\cap F) \geqslant 0{,}65$
   Donc $P(F) \geqslant 0{,}65$, donc la livraison d'œufs frais sera mise en place.
2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0{,}675$.
   a. $P_C(F) = \dfrac{P(F\cap C)}{P(C)}$
   - $P(C\cap F) = P(F) - (P(A\cap F) + P(B\cap F)) = 0{,}675 - 0{,}65 = 0{,}025$

- $P(C) = 1 - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

$P_C(F) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}025}{\frac{1}{12}} = 12 \times 0{,}025 = 0{,}3$

b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais. La probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille est $P_F(C) = \dfrac{P(C \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}025}{0{,}675} \approx 0{,}04$.

Partie B

1. La masse, en gramme, d'un panier de grande taille peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart-type 420. Un panier de grande taille est déclaré non conforme lorsque sa masse est inférieure à 4,5 kg.

On choisit au hasard un panier de grande taille.

La probabilité qu'il soit non conforme est $P(X < 4500)$ qui, arrondie au centième, donne 0,12.

2. Les responsables de l'association décident de modifier la méthode de remplissage. Avec cette nouvelle méthode, la masse, en gramme, d'un panier de grande taille est désormais modélisée par une variable aléatoire, notée Y, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart-type σ. La probabilité qu'un panier de grande taille choisi au hasard soit non conforme est alors de 0,04.

On a donc $P(Y < 4500) = 0{,}04$.

Soit $Z = \dfrac{Y - \mu}{\sigma} = \dfrac{Y - 5000}{\sigma}$.

D'après le cours, la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.

$Y < 4500 \iff Y - 5000 < -500 \iff \dfrac{Y - 5000}{\sigma} < \dfrac{-500}{\sigma}$

Donc $P(Y < 4500) = 0{,}04$ équivaut à $P\left(Z < \dfrac{-500}{\sigma}\right) = 0{,}04$; à la calculatrice on trouve $\dfrac{-500}{\sigma} \approx -1{,}75069$ ce qui donne $\sigma \approx 286$.

Partie C

Depuis plusieurs années, les associations distribuant des produits frais à leurs adhérents se développent dans tout le pays et connaissent un succès grandissant.

Lors d'une émission de radio consacrée à ce sujet, un journaliste annonce que 88 % des adhérents de ces associations sont satisfaits ; la proportion d'adhérents satisfaits est donc supposée être de $p = 0{,}88$.

Un auditeur intervient dans l'émission pour contester le pourcentage avancé par le journaliste. à l'appui de son propos, l'auditeur déclare avoir réalisé un sondage auprès de 120 adhérents de ces associations et avoir constaté que, parmi eux, seuls 100 ont indiqué être satisfaits.

On va teste l'hypothèse $p = 0{,}88$ sur un échantillon de taille $n = 120$.

$n = 120 \geqslant 30$, $np = 105{,}6 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 14{,}4$ donc on peut utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}88 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}88 \times 0{,}12}}{\sqrt{120}}\ ;\ 0{,}88 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}88 \times 0{,}12}}{\sqrt{120}}\right]$$

$$\approx \left[0{,}822\ ;\ 0{,}938\right]$$

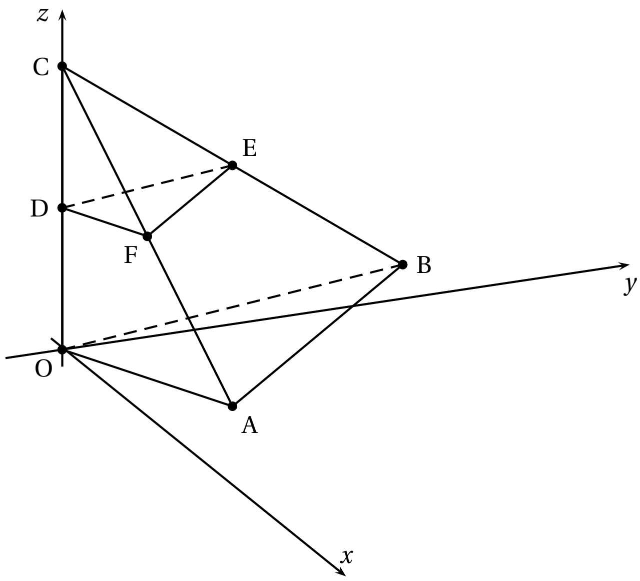
La proportion d'adhérents satisfaits dans l'échantillon de taille 120 est $f = \dfrac{100}{120} \approx 0{,}833$.

$f \in I$ donc la contestation de l'auditeur n'est pas fondée.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(10; 0; 1), B(1; 7; 1) et C(0; 0; 5).



1. **a.** $\overrightarrow{OA}\,(10\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{OB}\,(1\ ;\ 7\ ;\ 1)$ donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 10\times 1 + 0\times 7 + 1\times 1 = 11 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas orthogonaux, donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

   b. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}$ donc $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA\times OB}$
   Or $OA = \sqrt{10^2+0^2+1^2} = \sqrt{101}$ et $OB = \sqrt{1^2+7^2+1^2} = \sqrt{51}$.
   Donc $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{11}{\sqrt{101}\times\sqrt{51}}$; on en déduit que la mesure en degrés, arrondie au dixième de $\widehat{AOB}$ est 81.

2. Soit $\mathscr{Q}$ le plan d'équation $7x+9y-70z=0$.

   - $7x_O + 9y_O - 70z_O = 7\times 0 + 9\times 0 - 70\times 0 = 0$ donc $O \in \mathscr{Q}$.
   - $7x_A + 9y_A - 70z_A = 7\times 10 + 9\times 0 - 70\times 1 = 0$ donc $A \in \mathscr{Q}$.
   - $7x_B + 9y_B - 70z_B = 7\times 1 + 9\times 7 - 70\times 1 = 0$ donc $B \in \mathscr{Q}$.

   Le plan (OAB) a donc pour équation cartésienne $7x+9y-70z=0$.

3. Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA), on cherche les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$: ce vecteur a pour coordonnées $(10-0\ ;\ 0-0\ ;\ 1-5) = (10\ ;\ 0\ ;\ -4)$.
   La droite (CA) a donc pour représentation paramétrique :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0+10k\\ y &=& 0+0k\\ z &=& 5-4k\end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 10k\\ y &=& 0\\ z &=& 5-4k\end{array}\right.$ où $k\in\mathbb{R}$.

4. Soit D le milieu du segment [OC]. Les coordonnées de D sont donc (0 ; 0 ; 2,5).
   Tout plan parallèle au plan (OAC) d'équation $7x+9y-70z=0$ a une équation de la forme
   $7x+9y-70z+d=0$.
   Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (OAB) passe par D donc le réel d vérifie $7x_D+9y_D-70z_D+d=0$ soit $7\times 0+9\times 0-70\times 2{,}5+d=0$, ce qui donne $d=175$.
   Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation $7x+9y-70z+175=0$.

5. Le plan $\mathscr{P}$ coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F

Les coordonnées de F vérifient à la fois l'équation de la droite (CA) et l'équation du plan $\mathscr{P}$, donc vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 10k \\ y &=& 0 \\ z &=& 5-4k \\ 7x+9y-70z+175 &=& 0 \end{array}\right.$

Il s'agit donc de chercher le réel k tel que $7(10k)+9(0)-70(5-4k)+175=0$, autrement dit $k=\dfrac{1}{2}$.

Cela donne $x_{\text{F}} = 10\times\dfrac{1}{2} = 5$, $y_{\text{F}} = 0$ et $z_{\text{F}} = 5-4\times\dfrac{1}{2} = 3$.

Le point F a pour coordonnées $(5\,;\,0\,;\,3)$.

On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\,;\,3\right)$.

6. On va démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

$\overrightarrow{\text{EF}}$ a pour coordonnées $\left(5-\frac{1}{2}\,;\,0-\frac{7}{2}\,;\,3-3\right) = \left(\frac{9}{2}\,;\,-\frac{7}{2}\,;\,0\right)$.

$\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(1-10\,;\,7-0\,;\,1-1) = (-9\,;\,7\,;\,0)$.

$\overrightarrow{\text{AB}} = -2\overrightarrow{\text{EF}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires, donc les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

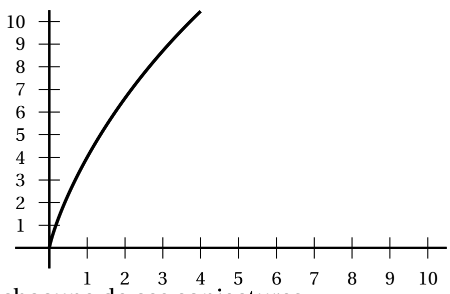
Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 4x - x\ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
$g(x)=0 \iff 4x-x\ln x=0 \iff x(4-\ln x)=0 \iff 4-\ln x=0 \iff 4=\ln x \iff x=\text{e}^4$.
2. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
$g(x)>0 \iff 4x-x\ln x>0 \iff x(4-\ln x)>0 \iff 4-\ln x>0 \iff 4>\ln x \iff x<\text{e}^4$.
Donc $g(x)>0$ sur $]0\,;\,\text{e}^4[$ et $g(x)<0$ sur $]\text{e}^4\,;\,+\infty[$.
3.
   - $g(x)<0$ sur $]\text{e}^4\,;\,+\infty[$ donc la première conjecture est fausse.
   - $g(1)=4>0$ et $g(\text{e}^4)=0$, donc $g(1)>g(\text{e}^4)$ alors que $1<\text{e}^4$; donc la deuxième conjecture est fausse.

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. a. On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$.

Pour calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x$, on pose $t=\dfrac{1}{x}$; donc $x\ln x = \dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{\ln(t)}{t}$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} t=+\infty$; or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x=0$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} 4x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

2. a. Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 4 \times 1 + 1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 4 + \ln x - 1 = 3 - \ln x$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) > 0 \iff 3 - \ln x > 0 \iff 3 > \ln x \iff x < \mathrm{e}^3$.

- On a vu que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.
- $g(\mathrm{e}^3) = 4\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^3 \ln(\mathrm{e}^3) = 4\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^3 \times 3 = \mathrm{e}^3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \ln x = -\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} x(4 - \ln x) = -\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		e^3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	$-\infty$

3. On désigne par G la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x)$.

On admet que la fonction G est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

a. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $G'(x) = \dfrac{1}{4}2x \times (9 - 2\ln x) + \dfrac{1}{4}x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{9x}{2} - x\ln x - \dfrac{x}{2} = 4x - x\ln x = g(x)$ donc G est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. On cherche si l'affirmation suivante est vraie :

« Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. »

$\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = G(\alpha) - G(1)$ donc $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff G(\alpha) - G(1) = 0 \iff G(\alpha) = G(1)$

$G(1) = \dfrac{1}{4} \times 1^2(9 - 2\ln 1) = \dfrac{9}{4}$

Il s'agit donc de savoir s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $G(\alpha) = \dfrac{9}{4}$.

Le fonction G est dérivable donc continue, et a pour dérivée la fonction g dont on connaît le signe : on sait que si $x > \mathrm{e}^4$, $g(x) < 0$ donc la fonction G est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^4\,;\,+\infty\right[$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} 9 - 2\ln x = -\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x) = -\infty$
  $\implies \lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = -\infty$
- $G(\mathrm{e}^4) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4\right)^2\left(9 - 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right)\right) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^8(9 - 8) = \dfrac{\mathrm{e}^8}{4} > \dfrac{9}{4}$

La fonction G est continue, strictement décroissante sur $\left]\mathrm{e}^4\,;\,+\infty\right[$; de plus $G(\mathrm{e}^4) > \dfrac{9}{4}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = -\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $G(x) = \dfrac{9}{4}$ admet une solution unique sur $\left]\mathrm{e}^4\,;\,+\infty\right[$.

L'affirmation proposée est donc fausse.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On considère la suite $\left(p_n\right)$ définie pour tout entier naturel n, par $p_n = n^2 - 42n + 4$.
Affirmation 1 : La suite $\left(p_n\right)$ est strictement décroissante.

$p_{22} = 22^2 - 42 \times 22 + 4 = -436$ et $p_{23} = 23^2 - 42 \times 23 + 4 = -433$
$p_{22} < p_{23}$ donc la suite (p_n) n'est pas décroissante.
Affirmation 1 fausse

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout n, $v_n = u_n^2 - 1$ donc $u_n^2 = v_n + 1$.
$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}\left(u_n^2+8\right) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 + \frac{8}{9} - 1 = \frac{1}{9}(v_n+1) - \frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{9}v_n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}v_n$$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{9}$.
Affirmation 2 vraie

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$.
Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Pour tout n non nul,
$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n \iff \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$
$$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{n^2+2n+1}$$
$$\iff \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$
D'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.
Donc la suite (w_n) converge.
Affirmation 3 vraie

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n}$.

1. $U_1 = \dfrac{2U_0}{1+U_0} = \dfrac{2 \times \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

2. On va démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n$: $U_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $\dfrac{2^n}{1+2^n} = \dfrac{2^0}{1+2^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un entier naturel n quelconque ; on va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.
  $$U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n} = \dfrac{2\dfrac{2^n}{1+2^n}}{1+\dfrac{2^n}{1+2^n}} = \dfrac{2\times 2^n}{1+2^n} \times \dfrac{1+2^n}{1+2^n+2^n} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2\times 2^n} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$ $i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \dfrac{p}{p+1}$

Dans l'algorithme 2, le nombre i varie entre 0 et n donc prend $n+1$ valeurs ; la valeur de u en sortie est donc U_{n+1}. L'algorithme 2 ne convient donc pas.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède deux ports maritimes : un port de plaisance A, un port de commerce B.
Le port de plaisance A n'a pas d'accès direct à l'océan mais est relié au port de commerce B qui, lui, est ouvert sur l'océan. Un passant, installé en terrasse sur le port de plaisance A, jette une bouteille dans l'eau. À l'instant 0, la bouteille se trouve dans le port A.
Soit n un entier naturel. On admet que :

- quand la bouteille est dans le port A au bout de n heures, la probabilité qu'elle y soit encore l'heure suivante est $\dfrac{3}{5}$;
- quand la bouteille est dans le port B au bout de n heures, la probabilité qu'elle soit dans le port A l'heure suivante est $\dfrac{1}{10}$ et la probabilité qu'elle se trouve toujours dans le port B l'heure suivante est $\dfrac{1}{15}$;
- le port A n'ayant pas d'accès direct à l'océan, lorsque la bouteille est dans le port A, elle ne peut pas se trouver dans l'océan l'heure suivante ;
- une fois dans l'océan, la bouteille ne revient jamais dans les ports.

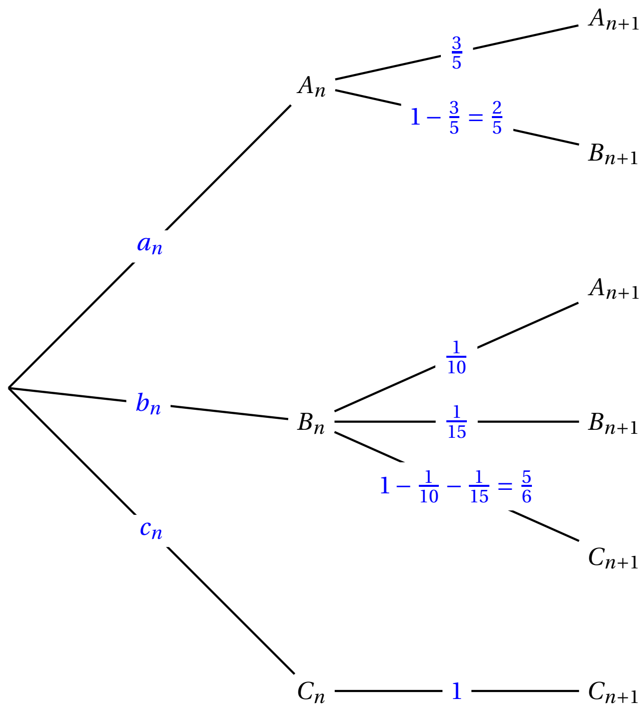
Soient les évènements :

- A_n : « la bouteille se trouve dans le port A au bout de n heures » ;
- B_n : « la bouteille se trouve dans le port B au bout de n heures » ;

- C_n : « la bouteille se trouve dans l'océan au bout de n heures ».

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.
Ainsi on a $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. a. On complète l'arbre pondéré :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$
$= a_n \times \dfrac{3}{5} + b_n \times \dfrac{1}{10}$

De même :

$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1})$
$= a_n \times \dfrac{2}{5} + b_n \times \dfrac{1}{15}$

On a donc : $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{3}{5}a_n + \dfrac{1}{10}b_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{2}{5}a_n + \dfrac{1}{15}b_n \end{array} \right.$

Soient les matrices suivantes : $M = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

c. Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{3}{5}a_n + \dfrac{1}{10}b_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{2}{5}a_n + \dfrac{1}{15}b_n \end{array} \right.$ s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{30} & \frac{3}{30} \\ \frac{12}{30} & \frac{2}{30} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $U_{n+1} = MU_n$.

On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$..
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $U_n = M^n U_0$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $M^0 = I_2$ la matrice unité d'ordre 2 et on a $I_2 U_0 = U_0$.
  Donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un n entier naturel quelconque ; on va démonter qu'elle est vraie au rang $n+1$.
  $\mathscr{P}_n$ est vraie, ce qui signifie que $U_n = M^n U_0$.
  $U_{n+1} = MU_n = M \times M^n U_0 = M^{n+1} U_0$.
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n entier naturel.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = M^n U_0$.

2. **a.** D'après le texte, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, donc $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. $M^2 = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{900}\begin{pmatrix} 18\times 18+3\times 12 & 18\times 3+3\times 2 \\ 12\times 18+2\times 12 & 12\times 3+2\times 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{900}\begin{pmatrix} 360 & 60 \\ 240 & 40 \end{pmatrix}$
$= \dfrac{1}{45}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{3}M$

c. On démontre par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $M^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} M$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} M = M^1$ donc la propriété est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour n entier quelconque non nul, c'est-à-dire $M^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} M$.
  $M^{n+1} = M^n \times M = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} M \times M = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} M^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{2}{3}M = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n} M$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $M^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} M$.

d. Pour tout entier n strictement positif,
$U_n = M^n U = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} MU = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$. On en déduit que $\left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ b_n & = & \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \end{array} \right.$.

3. Soit n un entier strictement positif.

a. La probabilité que la bouteille soit dans l'océan au bout de n heures est égale à
$c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 - \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b. On considère l'algorithme ci-dessous :

$n \leftarrow 1$
Tant que $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} < 0,9$
$\quad n \leftarrow n+1$
Fin Tant que

Pour $n = 6$, on a $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \approx 0{,}87 < 0{,}9$ et pour $n = 7$, on a $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \approx 0{,}91 > 0{,}9$ donc le nombre contenu dans la variable n de cet algorithme à la fin de son exécution est 7.
Donc au bout de 7 heures, la probabilité que la bouteille se trouve dans l'océan est strictement supérieure à 0,9.