Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane
7 septembre 2017

Exercice 1 — 7 points

Commun à tous les candidats

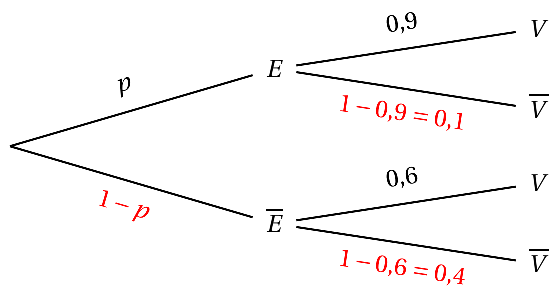
Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. On construit l'arbre pondéré représentant la situation :



2. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est :
$P(V) = P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V) = p \times 0,9 + (1-p) \times 0,6 = 0,9p + 0,6 - 0,6p = 0,3p + 0,6$.

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail, donc $P(V) = 0,675$.

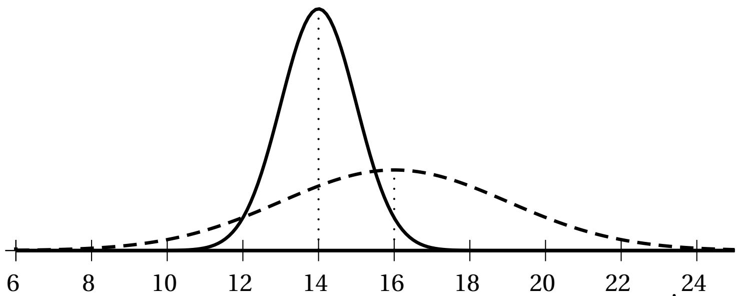
a. $\left.\begin{array}{rcl} P(V) & = & 0,3p+0,6 \\ P(V) & = & 0,675 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0,3p+0,6 = 0,675 \iff 0,3p = 0,075 \iff p = \dfrac{0,075}{0,3}$
donc $p = 0,25$

b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, la probabilité que la journée soit ensoleillée est :
$P_V(E) = \dfrac{P(V \cap E)}{P(V)} = \dfrac{p \times 0,9}{0,675} = \dfrac{0,25 \times 0,9}{0,675} = \dfrac{0,225}{0,675} = \dfrac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.
Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_V$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.



Les deux courbes sont symétriques par rapport aux deux droites verticales $t = 14$ et $t = 16$ donc les lois normales ont pour espérances 14 et 16.

L'écart-type est un paramètre de dispersion autour de l'espérance; plus cet écart-type est petit, plus la courbe est resserrée autour de l'espérance. Donc la courbe ayant pour espérance 14 correspond à l'écart-type le plus petit, donc 1 qui correspond au trajet en vélo; $\mu_V = 14$ et donc $\mu_C = 16$.

2. La probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes est $P(10 \leqslant T_V \leqslant 15)$ sachant que T_V suit la loi normale d'espérance 14 et d'écart-type 1; on trouve à la calculatrice : $P(10 \leqslant T_V \leqslant 15) \approx 0,8413$.

3. Pour savoir quel mode de déplacement Romane doit privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail, il faut comparer $P(T_V \leqslant 15)$ à $P(T_C \leqslant 15)$.

   - $P(T_V \leqslant 15) \geqslant P(10 \leqslant T_V \leqslant 15)$ donc $P(T_V \leqslant 15) \geqslant 0,84$.
   - $P(T_C \leqslant 15) < P(T_C \leqslant 16)$; or $\mu_C = 16$ donc $P(T_C \leqslant 16) = 0,5$ et donc $P(T_C \leqslant 15) < 0,5$.

   Donc $P(T_V \leqslant 15) > P(T_C \leqslant 15)$ donc il vaut mieux privilégier le vélo si Romane souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail.

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.
La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit b un réel positif.
   La fonction f a pour primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction F définie par $F(t) = -\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Donc $P(X \leqslant b) = \displaystyle\int_0^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_0^b = F(b) - F(0) = -\,\mathrm{e}^{-\lambda b} - \left(-\,\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \,\mathrm{e}^{-\lambda b}$.

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9 ce qui veut dire que $P(X \geqslant 50) = 0{,}9$.

a. $P(X \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$ donc $P(X \geqslant b) = 1 - P(X \leqslant b) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda b}$

$P(X \geqslant 50) = 0{,}9 \iff \mathrm{e}^{-\lambda \times 50} = 0{,}9 \iff -50\lambda = \ln(0{,}9) \iff \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}9)}{50}$

b. La probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures est $P_{(X \geqslant 200)}(X \geqslant 250)$.

La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc

$P_{(X \geqslant 200)}(X \geqslant 250) = P(X \geqslant 250 - 200) = P(X \geqslant 50) = 0{,}9$

Exercice 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Les points M_n et M_{n+2} ont pour affixes z_n et z_{n+2}.

$z_{n+2} = \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{3}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n\right) = \dfrac{\mathrm{i}^2}{9} z_n = -\dfrac{1}{9} z_n$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ a pour affixe z_{n+2} et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ a pour affixe z_n ; or $z_{n+2} = -\dfrac{1}{9} z_n$ donc $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}} = -\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ sont colinéaires donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés quel que soit n.

2. Le point M_n appartient au disque de centre O et de rayon 1 si $\mathrm{O}M_n \leqslant 1$. On sait que $\mathrm{O}M_n = |z_n|$.

Soit (d_n) la suite définie pour tout n par $d_n = |z_n|$.

On sait que $z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n$ donc $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n\right| = \left|\dfrac{\mathrm{i}}{3}\right| \times |z_n| = \dfrac{1}{3}|z_n|$; donc, pour tout n, $d_{n+1} = \dfrac{1}{3} d_n$.

De plus, $d_0 = |z_0| = 100$.

La suite (d_n) est définie par $d_0 = 100$ et $d_{n+1} = \dfrac{1}{3} d_n$, pour tout n.

Donc la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

- $-1 < q < 1$ donc la suite (d_n) est convergente et a pour limite 0.
  D'après la définition de la limite d'une suite, on peut déduire que l'intervalle $[0\,;\,1[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui répond à la question.
- On peut également déterminer le rang n à partir duquel tous les points sont situés dans le disque (*mais ce n'était pas explicitement demandé dans l'exercice*).
  On cherche n tel que $d_n < 1$. La suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$ donc, pour tout n, $d_n = d_0 \times q^n$ donc $d_n = 100\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
  On résout l'inéquation :
  $$d_n < 1 \iff 100\left(\frac{1}{3}\right)^n < 1 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0{,}01 \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < \ln(0{,}01) \iff n \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(0{,}01)$$
  $$\iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$
  Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4{,}2$ donc les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1 à partir de $n = 5$.

Exercice 3 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la courbe admet la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.
2. La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$:
$f'(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;\,+\infty[$:
$f'(x)>0 \iff \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}>0 \iff 1-\ln(x)>0 \iff 1>\ln(x) \iff \mathrm{e}>x \iff x<\mathrm{e}$
Donc la fonction f est : strictement croissante sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$;
strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. $u_0=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{x}\ln(x)$ est de la forme $u'u$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$; donc la fonction f a pour primitive sur $[1\,;\,2]$ la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{1}{2}\left[\ln(x)\right]^2$.
Donc $u_0=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_1^2=F(2)-F(1)=\frac{1}{2}\left[\ln(2)\right]^2-\frac{1}{2}\left[\ln(1)\right]^2=\frac{1}{2}\left[\ln(2)\right]^2$
La fonction f est positive sur $[1\,;\,2]$ donc $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
2. Pour tout x de $[1\,;\,2]$: $1\leqslant x\leqslant 2$
$\iff \ln(1)\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(2)$ la fonction ln est croissante sur $[1\,;\,2]$
$\iff 0\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(2)$
$\iff 0\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ $\quad\dfrac{1}{x^{n+1}}>0$ sur $[1\,;\,2]$
3. On a $0\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :
$\displaystyle\int_1^2 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,\mathrm{d}x$ ou encore $0\leqslant u_n\leqslant\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,\mathrm{d}x$.
On calcule $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,\mathrm{d}x=\ln(2)\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.
Pour $n>0$, la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x^{n+1}}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto-\dfrac{1}{nx^n}$.
Donc $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{n\times2^n}\right)-\left(-\frac{1}{n\times1^n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n\times2^n}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

Donc, pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

4. On cherche la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n} = 0\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

On a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout n, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 0$; on peut donc dire, d'après le théorème des gendarmes, que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 1 ; 14), B(0 ; 1 ; 8) et C(−2 ; 2 ; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$.

1. a. Les points A, B et C définissent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés, autrement dit si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0-1 ; 1-1 ; 8-14) = (-1 ; 0 ; -6)$.
$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2-1 ; 2-1 ; 4-14) = (-3 ; 1 ; -10)$.
$-1 \times 3 = -3$ et $0 \times 3 = 0 \neq 1$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que les points A, B et C définissent un plan.

b. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \times (-1) + 8 \times 0 + (-1) \times (-6) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times (-3) + 8 \times 1 + (-1) \times (-10) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$
Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (6 ; 8 ; −1) est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc c'est un vecteur normal au plan (ABC) ; le plan (ABC) a donc une équation cartésienne de la forme $6x + 8y - z + d = 0$, où d est un réel à déterminer.
Le plan (ABC) contient le point A donc les coordonnées de A vérifient l'équation du plan :
$6x_A + 8y_A - z_A + d = 0 \iff 6 + 8 - 14 + d = 0 \iff d = 0$
Le plan (ABC) a donc pour équation $6x + 8y - z = 0$.

2. On considère la droite Δ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t-3\\ y &=& t - \dfrac{1}{2},\\ z &=& 4t+2\end{array}\right.$ $t \in \mathbf{R}$.

a. D'après le cours, le vecteur de coordonnées (2 ; 1 ; 4) est un vecteur directeur de la droite Δ.

b. La droite Δ et le plan (ABC) sont sécants si le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t-3\\ y &=& t - \dfrac{1}{2}\\ z &=& 4t+2\\ 6x+8y-z &=& 0\end{array}\right.$

admet une solution unique.

Pour que ce système ait une solution, il faut que l'équation $6\left(2t-3\right)+8\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-\left(4t+2\right)=0$ ait une solution, c'est-à-dire $12t-18+8t-4-4t-2=0 \iff 16t=24 \iff t=1{,}5$.

En remplaçant t par 1,5 on trouve $x=0$, $y=1$ et $z=8$; la droite Δ et la plan (ABC) sont donc sécants en un point de coordonnées $(0~;~1~;~8)$.

3. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x~;~y~;~z)$ sont données par $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t^3+t\\ y &=& t+1, \quad t\in\mathbf{R}\\ z &=& 2t\end{array}\right.$

Il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC) si le système

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t^3+t\\ y &=& t+1\\ z &=& 2t\\ 6x+8y-z &=& 0\end{array}\right.$ admet une solution unique.

Pour que ce système ait une solution unique, il faut que l'équation $6(t^3+t)+8(t+1)-2t=0$ ait une solution unique.

$6t^3+6t+8t+8-2t=0 \iff 6t^3+12t+8=0$

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t)=6t^3+12t+8$.

f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(t)=18t^2+12>0$; donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

f est une fonction polynôme donc sa limite à l'infini est la limite de son terme de plus haut degré :

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty} 6t^3=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty} 6t^3=+\infty$.

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbf{R}$, et elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Sa limite en $-\infty$ est $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t)=0$ aura une unique solution sur $\mathbf{R}$.

Il existe donc un t unique solution de l'équation $6t^3+12t+8=0$, ce qui entraîne qu'il existe un unique point d'intersection de l'ensemble (E) et du plan (ABC).

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit p un entier relatif donné.

Soit l'équation $\left(E_p\right)$: $3x+4y=p$, où $(x~;~y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. $3\times(-p)+4\times p=-3p+4p=p$ donc le couple $(-p~;~p)$ est une solution particulière de $\left(E_p\right)$.

b. Soit S_p l'ensemble des couples de la forme $(-p+4k~;~p-3k)$ où $k\in\mathbf{Z}$.

- On suppose que le couple $(x~;~y)$ appartient à l'ensemble S_p ; alors il existe un entier relatif k tel que $x=-p+4k$ et $y=p-3k$.
  On a donc : $3x+4y=3(-p+4k)+4(p-3k)=-3p+12k+4p-12k=p$
  donc le couple $(x~;~y)$ est solution de l'équation $\left(E_p\right)$.
- On suppose que le couple $(x~;~y)$ est solution de $\left(E_p\right)$; cela signifie que $3x+4y=p$.
  On sait que le couple $(-p~;~p)$ est une solution particulière de $\left(E_p\right)$ donc $3(-p)+4p=p$.
  En retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient $3(x+p)+4(y-p)=0$ ou encore $3(x+p)=-4(y-p)$.
  D'après cette égalité, 4 divise $3(x+p)$; on sait que les nombres 3 et 4 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $x+p$.
  On en déduit que $x+p=4k$ avec $k\in\mathbf{Z}$ et donc que $x=-p+4k$.

De $3(x+p)=-4(y-p)$ et de $x+p=4k$, on déduit que $3\times 4k=-4(y-p)$ c'est-à-dire que $-3k=y-p$ ou encore $y=p-3k$.

On peut donc enfin dire que $(x\ ;\ y)=(-p+4k\ ;\ p-3k)$ avec $k\in\mathbf{Z}$, donc que le couple $(x\ ;\ y)$ appartient à S_p.

On a donc démontré que l'ensemble des solutions de l'équation $\left(E_p\right)$ est l'ensemble des couples $(-p+4k\ ;\ p-3k)$ où $k\in\mathbf{Z}$.

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $6x+8y-z=0$.

2. Soit M_0 un point de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ qui appartient au plan $\mathcal{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

a. On sait que le point M_0 appartient au plan $\mathcal{P}$, donc ses coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ vérifient l'équation du plan : $6x_0+8y_0-z_0=0$ donc $z_0=6x_0+8y_0$.

$6x_0$ est pair et $8y_0$ est pair donc $6x_0+8y_0$ est pair donc z_0 est pair.

b. On pose $z_0=2p$ où p est un entier relatif.

$6x_0+8y_0-z_0=0$ donc $6x_0+8y_0-2p=0$ ce qui équivaut à $6x_0+8y_0=2p$ ou encore $3x_0+4y_0=p$; donc le couple $(x_0\ ;\ y_0)$ est solution de l'équation $\left(E_p\right)$.

c.
- On vient de voir que si M_0 de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ appartient au plan $\mathcal{P}$, alors z_0 est pair et égal à $2p$, et $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ est solution de $\left(E_p\right)$. Donc $x_0=-p+4k$ et $y_0=p-3k$ d'après la question 1.
- Réciproquement, si un point M_0 a pour coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)=\left(-p+4k\ ;\ p-3k\ ;\ 2p\right)$ on a : $6x_0+8y_0-z_0=6(-p+4k)+8(p-3k)+2p=-6p+24k+8p-24k+2p=0$ donc $M_0\in\mathcal{P}$.

L'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ à coordonnées entières est donc l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme $\left(-p+4k\ ;\ p-3k\ ;\ 2p\right)$ où k et p sont des entiers relatifs.

3. À tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ avec

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&75&180\\56&41&-144\\28&-30&29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a. $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&75&180\\56&41&-144\\28&-30&29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31x+75y+180z\\56x+41y-144z\\28x-30y+29z\end{pmatrix}$

Donc $\begin{aligned}[t]6x'+8y'-z'&=6(31x+75y+180z)+8(56x+41y-144z)-(28x-30y+29z)\\&=186x+450y+1\,080z+448x+322y-1\,152z-28x+30y-29z\\&=606x+808y-101z=101(6x+8y-z)\end{aligned}$

b. Si le point M est un point du plan $\mathcal{P}$, alors $6x+8y-z=0$ donc $101(6x+8y-z)$, et donc $6x'+8y'-z'=0$ ce qui prouve que le point M' est aussi un point du plan $\mathcal{P}$.

c. Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par O.

Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $6x+8y-z=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6\ ;\ 8\ ;\ -1)$; ce vecteur est donc un vecteur directeur de la droite Δ. De plus, la droite Δ passe par le point O donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&6t\\y&=&8t\\z&=&-t\end{array}\right.\quad t\in\mathbf{R}$

On suppose que le point M appartient à la droite Δ donc il a ses coordonnées de la forme $(6t\ ;\ 8t\ ;-t)$ où $t\in\mathbf{R}$.

Le point M' a pour coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ telles que $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31x+75y+180z\\56x+41y-144z\\28x-30y+29z\end{pmatrix}$ et donc :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x' &=& 31\times 6t+75\times 8t+180\times(-t) &=& 606t &=& 6(101t)\\ y' &=& 56\times 6t+41\times 8t-144\times(-t) &=& 808t &=& 8(101t)\\ z' &=& 28\times 6t-30\times 8t+29\times(-t) &=& -101t &=& -(101t)\end{array}\right.$$

Les coordonnées de M' sont donc de la forme $(6t'\ ;\ 8t'\ ;\ -t')$ où $t'\in\mathbf{R}$ donc le point M' appartient à la droite Δ.