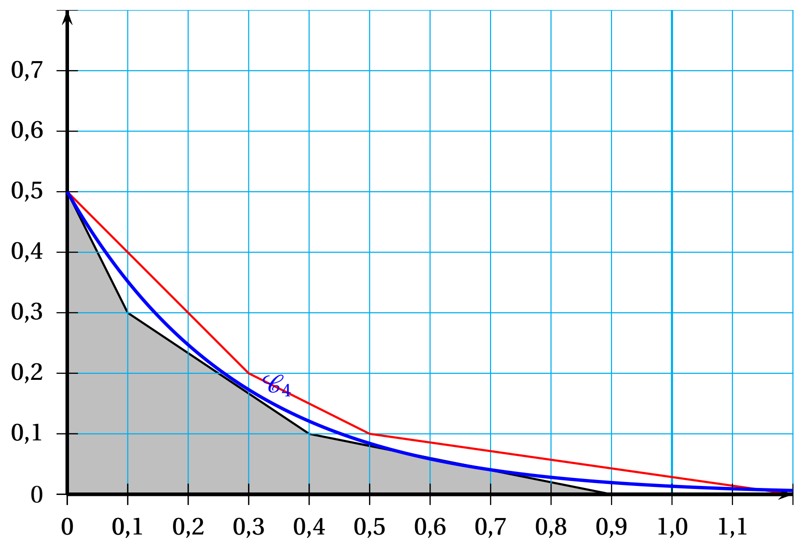
∽ Corrigé du baccalauréat S (spécialité) Antilles-Guyane ∾ septembre 2016

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Étude graphique

1. Quel que soit n naturel et quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-(n-1)x} > 0$ et $1+\mathrm{e}^x > 1 > 0$: les fonctions f_n sont donc positives : les termes de la suite (u_n) sont des intégrales de fonctions positives sur $[0\,;\,1]$: u_n est donc l'aire, en unités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
2. D'après l'allure des courbes on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0.
3.



L'aire de la surface grisée s'obtient comme la somme des aires de deux trapèzes et d'un triangle : $4+6+2,5=12,5$ carrés d'aire 0,01.
L'aire de la surface limitée par les axes et la ligne rouge se décompose en $10,5+3+3,5=17$ aires de carrés d'aire 0,01.
On en déduit que $0,125 < u_4 < 0,17$.
On a donc

$$0,12 < u_4 < 0,17.$$

Partie B - Étude théorique

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.
En posant $u(x)=1+\mathrm{e}^x$ on obtient $u'(x)=\mathrm{e}^x$, donc :
$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln u(x)]_0^1 = \left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. Par linéarité de l'intégrale :
$u_0 + u_1 = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-(1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x =$
$\int_0^1 \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1-0 = 1.$
On en déduit que : $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
3. L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[0;1]$ est positive. Donc $u_n > 0$
4. **a.** $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} =$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}(1-\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-nx}\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
b. On sait que pour tout naturel n et pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et que $1+\mathrm{e}^x > 1 > 0$.
Le signe de $d_n(x)$ est donc celui de $1-\mathrm{e}^x$.
Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ par croissance de la fonction exponentielle, soit $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$, d'où $-\mathrm{e} \leqslant -\mathrm{e}^x \leqslant -1$ et enfin $1-\mathrm{e} \leqslant 1-\mathrm{e}^x \leqslant 0$.
Conclusion : $1-\mathrm{e}^x \leqslant 0 \Rightarrow d_n(x) \leqslant 0$.
5. $d_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
Il en résulte par intégration sur l'intervalle $[0;1]$que $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est décroissante.
Comme on a vu qu'elle minorée par zéro, elle est donc convergente vers une limite ℓ supérieure ou égale à zéro.
6. **a.** $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} + \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}$ et par linéarité de l'intégrale :
$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\right]_0^1 =$
$-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{-n} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.
b. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-n} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0$.
On a donc $\ell = 0$.
c. Tant que $K < N$
Affecter $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-K}}{K} - U$ à U
Affecter $K+1$ à K
Fin Tant que

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Le point H a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1).
$M \in (\mathrm{BH}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{\mathrm{B}M} = t\overrightarrow{\mathrm{BH}} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-0 &=& t(1-0)\\ y-0 &=& t(1-0)\\ z-0 &=& t(1-0)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& t\end{array}\right.$
2. On a D(1 ; 1 ; 0), E(1 ; 0 ; 1) et G(0 ; 1 ; 1).
D'où $\overrightarrow{\mathrm{DE}}(0~;~-1~;~1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}(-1~;~0~;~1)$.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{BH}}(1~;~1~;~1)$ ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$, soit à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG). Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ est donc normal au plan (DEG) : la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. D'après la question précédente une équation du plan (DEG) est :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(DEG)} \iff 1x + 1y + 1z + d = 0$.
On a par exemple D $\in$ (DEG) $\iff 1 + 1 + 0 + d = 0 \iff d = -2$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(DEG)} \iff x + y + z - 2 = 0$.

4. les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la droite (Bh) et l'équation du plan (DEG) soit :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \\ x+y+z-2 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}.$$
On a donc $\text{P}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

5. On a :
$\text{PD}^2 = \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{2}{3}\right)^2$;
$\text{PE}^2 = \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2$;
$\text{PG}^2 = \left(0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2$.
On a donc de façon évidente $\text{PD}^2 = \text{PE}^2 = \text{PG}^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, soit PD = PE = PG.
Le point P est donc équidistant des trois sommets du triangle (DEG), c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (DEG), mais comme celui-ci est équilatéral car ses trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 1, le point P est orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle équilatéral (DEG).

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On a $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0 \iff (z+a)^2 + 1 = 0 \iff (z+a)^2 - \text{i}^2 = 0 \iff$
$(z + a + \text{i})(z + a - \text{i}) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z+a & = & -\text{i} \\ z+a & = & \text{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -a-\text{i} \\ z & = & -a+\text{i} \end{array}\right.$
a est réel donc les deux solutions sont complexes conjuguées de même module.

2. $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\theta} = \text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}\left(\text{e}^{-\text{i}\frac{\theta}{2}} + \text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}\right) = \text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \text{i}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} + \text{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\theta}{2}}$ qui est l'écriture exponentielle de z.
Le module de z est donc $2\cos\frac{\theta}{2}$ et un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.

3. On a pour tout réel x, $f'(x) = -\text{e}^{-x}\sin x + \text{e}^{-x}\cos x = \text{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
Donc $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{e}^{-\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

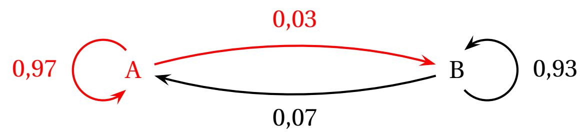
4. On a $P(X \leqslant 30) = \displaystyle\int_0^{30} 0{,}02\text{e}^{-0{,}02x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0{,}02x}\right]_0^{30} = -\text{e}^{-0{,}02\times 30} + 1 \approx 0{,}451 \approx 0{,}45$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On décrit la situation précédente à l'aide d'un graphe en appelant A l'état « être sain » et B l'état « être défaillant » :



2. $a_1 = 0,97a_0 + 0,07b_0 = 0,97 \times 0,4 + 0,07 \times 0,6 = 0,43$
$b_1 = 0,03a_0 + 0,93b_0 = 0,03 \times 0,4 + 0,93 \times 0,6 = 0,57$

3. D'après le texte, on peut dire que $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,97\,a_n + 0,07\,b_n \\ b_{n+1} &=& 0,03\,a_n + 0,93\,b_n \end{array}\right.$

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   a. La traduction matricielle du système précédent, est :
   $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
   ou encore $X_{n+1} = AX_n$.

   b. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $X_n = A^n X_0$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $A^n = A^0 = I_2$ la matrice identité d'ordre 2.
     $A^0 \times X_0 = I_2 \times X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité**
     On suppose la propriété vraie à un rang $p \geqslant 0$; on va démontrer qu'elle est vraie au rang $p + 1$.
     On a comme hypothèse que $X_p = A^p X_0$.
     $X_{p+1} = A \times X_p = A \times (A^p X_0) = (A \times A^p) \times X_0 = A^{p+1} X_0$
     Donc la propriété est démontrée pour le rang $p + 1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

   c. $X_{30} = A^{30} X_0 \approx \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$
   Au bout de 30 jours, il y a 68,7 % d'appareils sains, et 31,3 % d'appareils défectueux.

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.

   a. Au bout de $n + 1$ jours, un appareil est soit sain soit défectueux ; la proportion d'appareils sains est a_{n+1} et la proportion d'appareil défectueux est b_{n+1} donc $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. On a vu que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,97\,a_n + 0,07\,b_n \\ b_{n+1} &=& 0,03\,a_n + 0,93\,b_n \end{array}\right. ;$$

or, pour tout n, $a_n + b_n = 1$, donc $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,97\,a_n + 0,07\,(1-a_n) \\ b_{n+1} &=& 0,03\,(1-b_n) + 0,93\,b_n \end{array}\right.$

ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,9\,a_n + 0,07 \\ b_{n+1} &=& 0,9\,b_n + 0,03 \end{array}\right.$

$$DX_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n \\ 0,9b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,07 \\ 0,9b_n + 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$, donc $X_n = Y_n + 10B$.

a. $Y_{n+1} = X_{n+1} - 10B = DX_n + B - 10B = D(Y_n + 10B) - 9B = DY_n + 10DB - 9B$

$10D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_2$ donc $10DB - 9B = 9I_2B - 9B = 9B - 9B = 0$

Donc $Y_{n+1} = DY_n$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.

Donc $X_n = Y_n + 10B = D^n Y_0 + 10B = D^n(X_0 - 10B) + 10B$.

c. $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ donc $D = 0,9I_2$;

on a donc $D^n = 0,9^n I_2^n = 0,9^n I_2 = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$

$X_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$ donc $10B = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rl} X_n = D^n(X_0 - 10B) + 10B & \iff X_n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \\ & \iff X_n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \\ & \iff X_n = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n \\ 0,3 \times 0,9^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \\ & \iff X_n = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_n &=& -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ b_n &=& 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{array}\right. \end{array}$$

3. La proportion d'ordinateurs défaillants est b_n et on cherche $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Or $-1 < 0,9 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ et on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0,3$.

Sur le long terme, on peut dire que la proportion d'ordinateurs défaillants va tendre vers 30 %.