Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2015

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.
   a. Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
   d. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
   En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   b. Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$
   b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$
   c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$
   b. En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les trois questions sont indépendantes.

Toute réponse doit être justifiée.

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

   La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln(v_n)$.
La proposition $(\mathscr{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$(\mathscr{P})$: si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.

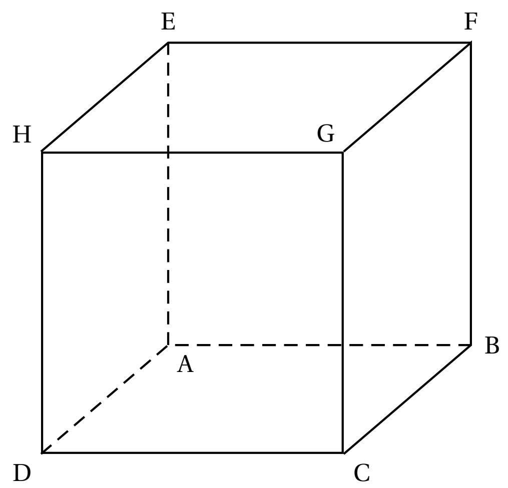
3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par

$$z_0 = 2 + 3\text{i et,}\quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \text{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& s \\ y &=& 1-s, \\ z &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;\, t\,;\, t)$ où t est un réel.

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point de la droite (AG).

a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. **a.** Donner un couple solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de cette équation.
   b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?