Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 11 septembre 2014

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur »;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
   Calculer la valeur exacte de λ.
2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
   Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\text{e}^{-x} = x$.
   Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100}.

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère l'équation (E_1) :

$$\text{e}^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :
$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$
2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

EXERCICE 4 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \text{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

EXERCICE 4 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.
De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1[er] janvier de l'année $2014 + n$, exprimées en millions d'euros.
On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On suppose que le 1[er] janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.
2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
3. On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.
   a. Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.
   b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP. Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n,
$A^n = PD^nQ$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.

5. Soit n un entier naturel. On admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\left(-0,3^n + 0,7^n\right) \\ 0,5\left(-0,3^n + 0,7^n\right) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}.$$

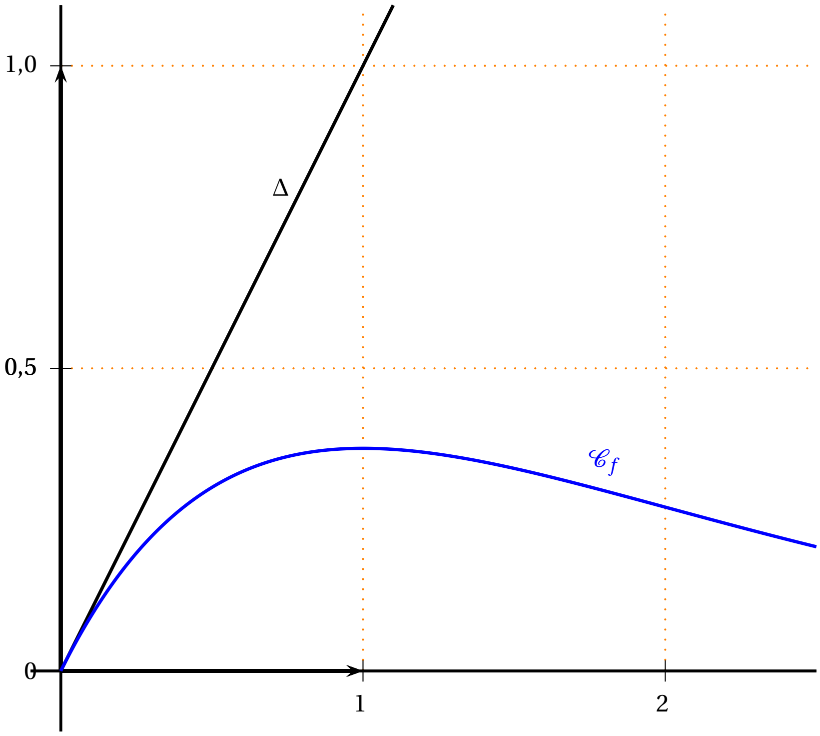
a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.

b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

Annexe de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Partie B - Question 1



Partie C

Déclaration des variables :
  S et u sont des nombres réels
  k est un nombre entier
Initialisation :
  u prend la valeur ......
  S prend la valeur ......
Traitement :
  Pour k variant de 1 à ....
    u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
    S prend la valeur ....
  Fin Pour
  Afficher ......