Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane
11 septembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Partie B

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P. Δ a pour vecteur directeur $\delta(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$
   La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AB}}(4\ ;\ -2\ ;\ -1)$.
   La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AC}}(-1\ ;\ -1\ ;\ -2)$.
   Or $\delta \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 4 - 6 + 2 = 0$ et $\delta \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = -1 - 3 + 4 = 0$.
   Donc Δ est orthogonale à deux droites (AB) et (AC) sécantes du plan P : elle est orthogonale à ce plan.
   VRAIE.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
   On a vu que Δ et (AB) étaient orthogonales, donc elles ne sont pas parallèles.
   Si elles sont coplanaires elles sont donc sécantes en un point.
   En traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{A}M} = t'\overrightarrow{\text{AB}}$, on obtient une équation cartésienne de la droite (AB) :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t'\\ y &=& -2t' - 1\\ z &=& -t' + 1\end{array}\right.$ avec t' appartenant à $\mathbb{R}$.
   S'il existe un point commun aux deux droites ses coordonnées vérifient le système :
   $\left\{\begin{array}{rcl} t &=& 4t'\\ 3t - 1 &=& -2t' - 1\\ -2t + 8 &=& -t' + 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 4t'\\ 12t' &=& -2t'\\ -8t' &=& -t' - 7\end{array}\right.$ système qui n'a manifestement pas de solution. **FAUSSE**
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
   On a $4 + 3 \times (-3) - 2 \times 0 + 5 = 0 \iff -5 = 0$, qui signifie que les coordonnées de B ne vérifient pas cette équation de plan. **FAUSSE**
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.
   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
   O n'appartient pas au plan : si la droite D est parallèle au plan, elle est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ normal au plan.
   Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 11 - 3 - 8 = 0$. Les vecteurs sont bien orthogonaux, la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$. **VRAIE**

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude du cas $k = 1$

$$f_1(x) = x\text{e}^{-x}.$$

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

$f_1(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_1$ en $+\infty$.

2. f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1-x$.

Donc $f_1'(x) > 0$ si $x < 1$ et $f_1'(x) < 0$ si $x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. $g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

g_1 étant dérivable, on a pour tout réel,

$g_1'(x) = -1\mathrm{e}^{-x} - 1 \times [-(x+1)\mathrm{e}^{-x}] = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f_1(x)$.

Donc g_1 est bien une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, $f_1(x) = 0 \iff x = 0$.

Le tableau de variations ci-dessus montre donc que $f_1(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $f_1(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. Comme la fonction est positive sur $]0\,;\,+\infty[$, elle l'est aussi sur $]0\,;\,\ln 10]$, donc l'aire cherchée est en unités d'aire égale à l'intégrale :

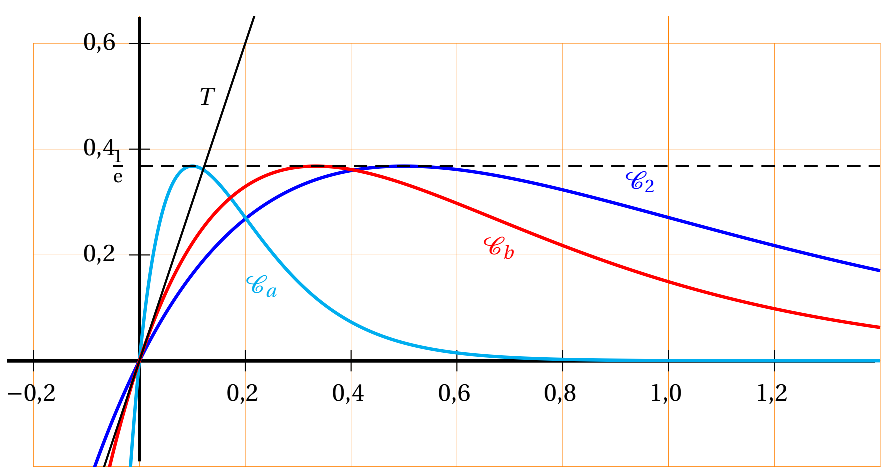
$$\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[g_1(x)\right]_0^{\ln 10} = g_1(\ln 10) - g_1(0) = -(\ln 10 + 1)\mathrm{e}^{-\ln 10} + \mathrm{e}^0.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\ln 10} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$, l'aire est égale à :

$$1 - \frac{1+\ln 10}{10} = \frac{9}{10} - \frac{\ln 10}{10} \approx 0,67 \text{ u. a.}$$

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.



1. De façon évidente $f_k(0) = k \times 0 \times \text{e}^0 = 0$, donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par l'origine.
2. **a.** Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f_k l'est aussi et :
   $f_k'(x) = k\text{e}^{-kx} - k \times kx\text{e}^{-kx} = k\text{e}^{-kx}(1 - kx)$.

   b. k strictement positif, et $\text{e}^{-kx} > 0$, pour tout réel x, donc le signe de la dérivée $f_k'(x)$ est celui de $1 - kx$.
   Or $1 - kx < 0 \iff \dfrac{1}{k} < x$; $1 - kx > 0 \iff \dfrac{1}{k} > x$; $1 - kx = 0 \iff \dfrac{1}{k} = x$.
   Il en résulte que la fonction f_k est :
   croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{k}\right[$, et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$;
   elle admet donc un maximum en $\dfrac{1}{k}$:
   $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = k \times \dfrac{1}{k} \times \text{e}^{-k \times \frac{1}{k}} = 1\text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}} \approx 0{,}368$.
   Conclusion : toutes les fonctions ont le même maximum e^{-1} pour $x = \dfrac{1}{k}$.

   c. Le maximum pour $k = 2$ est obtenu pour $x = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, donc le maximum pour f_a est obtenue pour une valeur $\dfrac{1}{a}$ inférieure à 0,5 donc $a > 2$.
   Note : en fait on peut penser que l'abscisse du minimum est à peu près égale à 0,1, ce qui correspond à $a = 10$.

   d. Une équation de cette tangente est :
   $y = f_k'(0)(x - 0) + f_k(0) \iff y = k(1 - 0)\text{e}^0 x + 0 \iff y = kx$.

   e. Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à $\dfrac{0{,}6}{0{,}2} = 3$.
   Donc la courbe $\mathcal{C}_b$ correspond à la valeur $b = 3$.

EXERCICE 3 — 4 points
Commun à tous les candidats

1. $p_1 = P\left(\mu_1 - 3\sigma_1 \leqslant X \leqslant \mu_1 + 3\sigma_1\right) = P(35{,}4 \leqslant X \leqslant 36{,}6) \approx 0{,}997$.
2. $p_2 = P(5{,}88 \leqslant Y \leqslant 6{,}12) = P(Y \leqslant 6{,}12) - P(Y \leqslant 5{,}88) \approx 0{,}984$.
3. **a.** Les deux évènements D et L étant indépendants on a :
   $P(D \cap L) = P(D) \times P(L) \approx 0{,}981$.
   La probabilité qu'une pièce ne soit pas acceptée est donc $1 - 0{,}981 \approx 0{,}02$ arrondi à 10^{-2}.

   b. D et L sont indépendants donc D et $\overline{L}$ le sont aussi d'après le cours.
   On a donc : $P_{\overline{L}}(D) = P(D) = p_2$.

EXERCICE 4 — 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : modélisation et simulation

1. $(-1\,;\,1)$: non car $x < 0$ ce qui n'est pas possible ;
   $(10\,;\,0)$: oui par exemple en choisissant 10 fois la valeur 0 pour y ;
   $(2\,;\,4)$: non car $y > 2$;
   $(10\,;\,2)$: oui par exemple en choisissant dans cet ordre 8 fois la valeur 0 puis deux fois la valeur 1 pour y.

2. Pour que Tom ait réussi la traversée, il faut qu'il soit arrivé au bout des 10 étapes, c'est-à-dire que $x = 10$ et qu'il ne tombe pas lors de cette dernière étape, ce qui est encore possible si sa position à l'étape précédente était $(9;1)$ ou $(9;-1)$; il faut donc tester également si y n'est pas plus grand que 1 ou plus petit que -1 en fin d'algorithme.

   On remplace dans l'algorithme la ligne :

   | Afficher « la position de Tom est » $(x;y)$

   par :

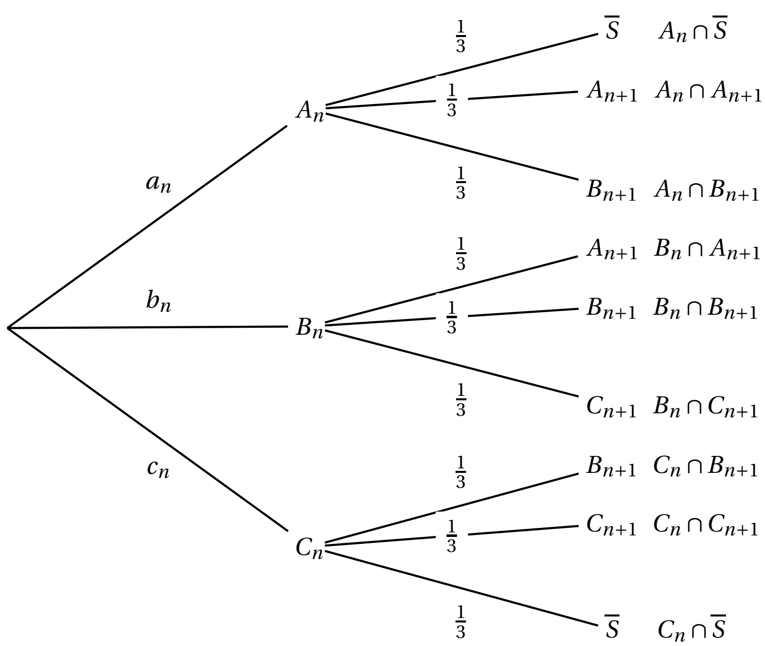
   | Si $x = 10$ et $y \geqslant -1$ et $y \leqslant 1$
   | alors Afficher « Tom a réussi la traversée »
   | sinon Afficher « Tom est tombé »
   | Fin du si

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Au départ, Tom se trouve à l'origine O donc son ordonnée est 0; donc l'évènement B_0 est réalisé : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
2. On va représenter sur un arbre pondéré le passage de l'état n à l'état $n+1$; une branche vers le haut signifie que le nombre choisi au hasard est -1, une branche du milieu signifie que le nombre est 0 et une branche vers le bas signifie que ce nombre vaut 1.

   Il est dit dans le texte que S représente l'évènement « Tom traverse le pont » donc $\overline{S}$ désigne l'évènement « Tom est tombé à l'eau ».



D'après la formule des probabilités totales :

$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$

$\quad = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{a_n + b_n}{3}$

De même $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times \dfrac{1}{3} == \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3}$

et $c_{n+1} = P(C_{n+1}) = b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{b_n + c_n}{3}$

3. $P(A_1) = a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{3} = \dfrac{1}{3}$; $P(B_1) = b_1 = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \dfrac{1}{3}$;

$P(C_1) = c_1 = \dfrac{b_0 + c_0}{3} = \dfrac{1}{3}$.

4. Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements si l'ordonnée y de sa position vaut -1, 0 ou 1, autrement dit dans le cas de l'évènement $A_2 \cup B_2 \cup C_2$. Les trois évènements A_2, B_2 et C_2 sont incompatibles donc $P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2)$.

$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \dfrac{2}{9}$; $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \dfrac{1}{3}$;

$c_2 = \dfrac{b_1 + c_1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{3} = \dfrac{2}{9}$.

$P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2) = a_2 + b_2 + c_2 = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

La probabilité que Tom se trouve sur le pont après deux déplacements est $\dfrac{7}{9}$.

5. Pour la même raison que dans la question précédente, la probabilité que Tom traverse le pont est $P(A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10}) = P(A_{10}) + P(B_{10}) + P(C_{10}) =$

$a_{10} + b_{10} + c_{10} \approx 0{,}040\,272 + 0{,}056\,953 + 0{,}040\,272 \approx 0{,}137\,497$ (d'après le tableau fourni).

Une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont est $0,137$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X −26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Si on saisit 3 comme valeur de A, le nombre X prend la valeur 3 qui est inférieure à 26 donc on n'entre pas dans la boucle « tant que » ; l'algorithme affiche la valeur de X donc 3.

2. Si on saisit 55 comme valeur de A, le nombre X prend d'abord la valeur 55 qui est supérieure à 26 ; la première fois qu'on entre dans la boucle, on remplace X par X−26 = 55 − 26 = 29. Le nombre 29 est encore supérieur ou égal à 26 donc on entre une seconde fois dans la boucle ; le nombre X est remplacé par X−26 = 29 − 26 = 3.

Le nombre 3 est strictement plus petit que 26 donc on n'entre pas dans la boucle et on affiche la valeur de X donc 3.

3. Dans cet algorithme, on soustrait 26 autant de fois que l'on peut du nombre positif X ; on obtient un nombre entier compris entre 0 et 25 qui représente le reste de la division de X par 26 et donc le reste de la division de A par 26.

Partie B

Explication du codage de RE en DP, autrement dit du passage de $\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$:

$C \times \begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times17+1\times4\\5\times17+2\times4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}51+4\\85+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix}$

Or $55 = 2\times 26+3$ donc 55 a pour reste 3 dans la division par 26.

Et $93 = 3\times 26+15$ donc 93 a pour reste 15 dans la division par 26.

On passe donc de $\begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$, donc le codage de RE représenté par $\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix}$ conduit à DP représenté par $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x_1', x_2' quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$.

a. Pour transformer $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ par le procédé de codage, on calcule d'abord

$\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1+x_2\\5x_1+2x_2\end{pmatrix}$; puis on détermine les restes de $3x_1+x_2$ et de $5x_1+2x_2$ dans la division par 26.

D'après le texte, on obtient $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ ce qui veut dire que z_1 est le reste de $3x_1+x_2$ dans la division par 26, et que z_2 est le reste de $5x_1+2x_2$ dans cette même division.

Or $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ est également transformé en $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, donc z_1 est aussi le reste de $3x_1'+x_2'$ dans la division par 26, et z_2 le reste de $5x_1'+2x_2'$ dans cette même division.

Les nombres $3x_1+x_2$ et $3x_1'+x_2'$ ont le même reste z_1 dans la division par 26 donc ils sont congrus modulo 26. Idem pour $5x_1+2x_2$ et $5x_1'+2x_2'$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{ll} 3x_1+x_2 \equiv 3x_1'+x_2' & (26)\\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x_1'+2x_2' & (26)\end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{ll} 3x_1+x_2 \equiv 3x_1'+x_2' & (26)\\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x_1'+2x_2' & (26)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2(3x_1+x_2) \equiv 2\left(3x_1'+x_2'\right) & (26)\\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x_1'+2x_2' & (26)\end{array}\right. \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{ll} 6x_1+2x_2 \equiv 6x_1'+2x_2' & (26)\\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x_1'+2x_2' & (26)\end{array}\right. \Rightarrow x_1 \equiv x_1' \quad (26)$ (par soustraction).

$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1+x_2 \equiv 3x_1'+x_2' & (26)\\ 5x_1+2x_2 \equiv 5x_1'+2x_2' & (26)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5(3x_1+x_2) \equiv 5\left(3x_1'+x_2'\right) & (26)\\ 3(5x_1+2x_2) \equiv 3\left(5x_1'+2x_2'\right) & (26)\end{array}\right. \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{ll} 15x_1+5x_2 \equiv 15x_1'+5x_2' & (26)\\ 15x_1+6x_2 \equiv 15x_1'+6x_2' & (26)\end{array}\right. \Rightarrow x_2 \equiv x_2' \quad (26)$ (par soustraction).

Donc $x_1 \equiv x_1' \quad (26)$ et $x_2 \equiv x_2' \quad (26)$.

On a : $\left.\begin{array}{r} x_1 \equiv x_1' \quad (26)\\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 25\\ 0 \leqslant x_1' \leqslant 25\end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 = x_1'$ et $\left.\begin{array}{r} x_2 \equiv x_2' \quad (26)\\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 25\\ 0 \leqslant x_2' \leqslant 25\end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 = x_2'$

Il n'y a donc qu'un couple d'entiers de $[0;25]$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ qui se code en $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Soit la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

$C \times C' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 1 \times (-5) & 3 \times (-1) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 2 \times (-5) & 5 \times (-1) + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C' \times C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + (-1) \times 5 & 2 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-5) \times 3 + 3 \times 5 & (-5) \times 1 + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc C' est la matrice inverse de C.

b. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + (-1) \times 15 \\ (-5) \times 3 + 3 \times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = -9 \\ y_2 = 30 \end{array} \right.$

c. Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 \equiv y_1 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array} \right.$

autrement dit $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 \equiv -9 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv 30 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array} \right.$

Or $\left\{ \begin{array}{ll} -9 \equiv 17 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant 17 \leqslant 25 \\ 30 \equiv 4 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant 4 \leqslant 25 \end{array} \right.$ donc $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 17 \\ x_2 = 4 \end{array} \right.$

d. On peut penser que le décodage d'un couple de lettres se fait de la même manière que son codage en remplaçant la matrice C par la matrice C'.

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 \\ -5z_1 + 3z_2 \end{pmatrix}$ donc $\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = 2z_1 - z_2 \\ y'_2 = -5z_1 + 3z_2 \end{array} \right.$

Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 \equiv y'_1 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y'_2 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array} \right.$

$3x_1 + x_2 \equiv 3y'_1 + y'_2 \equiv 3(2z_1 - z_2) + (-5z_1 + 3z_2) \equiv 6z_1 - 3z_2 - 5z_1 + 3z_2 \equiv z_1 \quad (26)$

$5x_1 + z_2 \equiv 5y'_1 + 2y'_2 \equiv 5(2z_1 - z_2) + 2(-5z_1 + 3z_2) \equiv 10z_1 - 5z_2 - 10z_1 + 6z_2$
$\equiv z_2 \quad (26)$

On peut donc dire : $\left\{ \begin{array}{ll} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 & (26) \end{array} \right.$

On a donc décodé la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ en la multipliant par la matrice C' pour obtenir $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ puis on a pris les restes module 26 pour obtenir enfin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Le système obtenu $\left\{ \begin{array}{ll} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 & (26) \end{array} \right.$ prouve que la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se code bien en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et donc que la matrice $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ se décode bien en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4. Les deux lettres QC correspondent à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On calcule $C' \times \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 16 + (-1) \times 2 \\ (-5) \times 16 + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 - 2 \\ -80 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 30 = 1\times 26+4 & \Longrightarrow & 30 \equiv 4 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant 4 \leqslant 25\\ -74 = -3\times 26+4 & \Longrightarrow & -74 \equiv 4 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant 4 \leqslant 25 \end{array}\right.$$

Le nombre 4 correspond à la lettre E donc QC se décode en EE.