Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane 13 septembre 2012

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1~;~-1~;~2)$; le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(1~;~1~;~2)$.
Ces vecteurs ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux, donc la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont non parallèles et non perpendiculaires.

2. L'équation a est à rejeter : les points de $\mathscr{D}$ ont des coordonnées qui ne vérifient pas cette équation.
Le plan d'équation $2x - z = 0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}(2~;~0~;-1)$.
Or $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 2 + 0 - 2 = 0$. Ces deux plans sont bien perpendiculaires.
Comme $2t - 2t = 0$ tout point point de $\mathscr{D}$ appartient au plan $\mathscr{P}'$ d'équation
$2x - z = 0$.

3. Soit $M(x~;~y~;~z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$, $2x - z = 0$ étant une équation de $\mathscr{P}'$; donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-1 &=& 0\\ 2x-z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-1 &=& 0\\ 2x-z &=& 0\\ x &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y+2z &=& 1-t\\ z &=& 2t\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 1-5t\\ z &=& 2t\end{array}\right.$$. Réponse c.

4. Calculons la distance du centre de la sphère au plan :
$d(\text{B}~;~\mathscr{P}) = \dfrac{|1-1+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,48 < 1$ (rayon du cercle).
L'intersection de la sphère et du plan est donc un cercle. Réponse c.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $|z_\text{A}|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_\text{A}| = 2$.
En factorisant ce module : $z_\text{A} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
De même $|z_\text{B}|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_\text{B}| = 2$.
En factorisant ce module : $z_\text{B} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

b. A appartient au cercle centré en O de rayon 2 et à la droite d'équation $y = 1$;
B appartient au cercle centré en O de rayon 2 et à la droite d'équation
$x = -1$;
C se place grâce à son abscisse et son ordonnée. Voir la figure à la fin de l'exercice.

c. On a vu que $|z_\text{A}| = 2 = \text{OA} = |z_\text{B}| = 2 = \text{OB}$: le triangle OAB est isocèle en O.
D'autre part on a trouvé les arguments de z_A et z_B. Donc :
$\left(\overrightarrow{\text{OA}}~;~\overrightarrow{\text{OB}}\right) = \arg z_\text{B} - \arg z_\text{A} = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.
Le triangle AOB est rectangle isocèle en O.

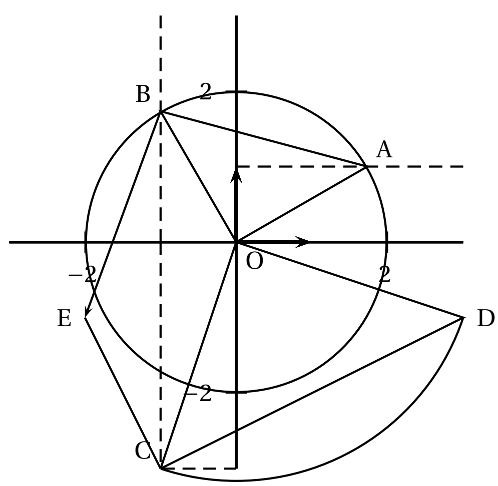
2. **a.** On sait que $z_\text{D} = z_\text{C}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = \text{i}z_\text{C} = \text{i}(-1-3\text{i}) = 3 - \text{i}$.
D'autre part $\overrightarrow{\text{BE}} = \overrightarrow{\text{OC}} \iff z_\text{E} - z_\text{B} = z_\text{C} \iff z_\text{E} = z_\text{B} + z_\text{C} = -2 + \text{i}\left(\sqrt{3} - 3\right)$.

b. $\overrightarrow{\text{OE}}\left(-2\,;\ \sqrt{3}-3\right)$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\left(3-\sqrt{3}\,;\ -2\right)$.
$\overrightarrow{\text{OE}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}} = -2\left(3-\sqrt{3}\right)-2\left(\sqrt{3}-3\right) = -2\left(3-\sqrt{3}\right)+2\left(3-\sqrt{3}\right) = 0$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OE}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ sont orthogonaux.
De plus $\left\|\overrightarrow{\text{OE}}\right\|^2 = (-2)^2+\left(3-\sqrt{3}\right)^2$ et $\left\|\overrightarrow{\text{AD}}\right\|^2 = \left(3-\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2$: ces expressions sont égales, donc $\left\|\overrightarrow{\text{OE}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\text{AD}}\right\|^2 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\text{OE}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{AD}}\right\| \iff \text{OE} = \text{AD}$.

3. a. Par définition du quart-de-tour B est l'image de A dans le quart-de-tour de centre O, on sait que $z_{\text{B}} = \text{i}z_{\text{A}}$ et de même $z_{\text{D}} = \text{i}z_{\text{C}}$.
D'autre part OBEC est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{\text{OE}} = \overrightarrow{\text{OB}}+\overrightarrow{\text{OC}} \iff$
$z_{\text{E}} = z_{\text{B}}+z_{\text{C}} = \text{i}z_{\text{A}}+z_{\text{C}}$.

b. En utilisant les deux derniers résultats précédents :
$\dfrac{z_{\text{D}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}} = \dfrac{\text{i}z_{\text{C}}-z_{\text{A}}}{\text{i}z_{\text{A}}+z_{\text{C}}} = \dfrac{\text{i}\left(z_{\text{C}}+\text{i}z_{\text{A}}\right)}{\text{i}z_{\text{A}}+z_{\text{C}}} = \text{i}$.

c. En utilisant module et argument des deux nombres complexes précédents, on obtient :
$\dfrac{z_{\text{D}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}} = \text{i} \Rightarrow \left|\dfrac{z_{\text{D}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}}\right| = |\text{i}| \iff \dfrac{\text{AD}}{\text{OE}} = 1 \iff \text{AD} = \text{OE}$;
$\dfrac{z_{\text{D}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}} = \text{i} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\text{OE}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \arg(\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\text{OE}\perp\text{AD}$.
Sans utiliser d'affixes connues, on arrive aux mêmes résultats.



EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : tracé d'une figure

1. Voir la figure à la fin de l'exercice : on construit le cercle de diamètre [AB], avec la médiatrice de [AB] qui coupe ce cercle en deux points dont l'un est le point D.
2. Même construction : la médiatrice de [OA] coupe le cercle de diamètre [OA] en deux points dont l'un est E.
3. D appartient à l'axe des ordonnées et a même ordonnée que A donc DA ⊥ DB. Le triangle DAB est rectangle en D.
   D'autre part DB = 2 et DA = 2 de façon évidentes : le triangle est isocèle en D.

Le but de l'exercice est de montrer de deux manières que les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie B : première méthode

1. **a.** L'angle de la similitude est $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et le rapport est égal à $\dfrac{\text{AD}}{\text{AB}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Si z a pour image z' par g, on sait que : $z' = az + b, \quad a,\ b \in \mathbb{R}$.
En particulier :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_{\text{A}} &=& az_{\text{A}} + b \\ z_{\text{D}} &=& az_{\text{B}} + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -2-4\text{i} &=& a(-2-4\text{i}) + b \\ -4\text{i} &=& -6\text{i}a + b \end{array}\right.$$

Par différence on obtient :
$-2 = a(-2-4\text{i}+6\text{i} \iff -2 = a(-2+2\text{i} \iff -1 = a(-1+\text{i}) \iff a = \dfrac{-1}{-1+\text{i}} = \dfrac{-(-1-\text{i}}{(-1+\text{i})(-1-\text{i})} = \dfrac{1+\text{i}}{1+1} =$
$a = \dfrac{1}{2}(1+\text{i})$.
La deuxième équation du système donne :
$-4\text{i} = -6\text{i} \times \dfrac{1}{2}(1+\text{i}) + b \iff -4\text{i} = -3\text{i} + 3 + b \iff b = -3-\text{i}$.
L'écriture complexe de g est bien :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)z - 3 - \text{i}.$$

c. On a la même configuration que pour le triangle rectangle isocèle DAB : le triangle rectangle isocèle EAD : $\left(\overrightarrow{\text{AO}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\text{AO}}{\text{AE}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d. En utilisant la similitude :
$z_{\text{E}} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right) \times 0 - 3 - \text{i} = -3 - \text{i}$.

2. $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{D}}} = \dfrac{-6\text{i} - 3 + 3\text{i}}{-3 - \text{i} + 4\text{i}} = \dfrac{-3-3\text{i}}{-3+3\text{i}} = \dfrac{-1+\text{i}}{-1-\text{i}} = \dfrac{(-1+\text{i})(-1+\text{i})}{(-1-\text{i})(-1+\text{i})} = \dfrac{1-1-2\text{i}}{1+1} = -\text{i}$.
Pour les modules : $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{D}}} = -\text{i} \Rightarrow \left|\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{D}}}\right| = |-\text{i}| \iff \dfrac{\text{CB}}{\text{DE}} = 1 \iff \text{CB} = \text{DE}$.
Pour les arguments : $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{D}}} = -\text{i} \Rightarrow \arg\left(\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{D}}}\right) = \arg -\text{i} \iff \left(\overrightarrow{\text{DE}},\ \overrightarrow{\text{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Conclusion DE $\perp$ CB.

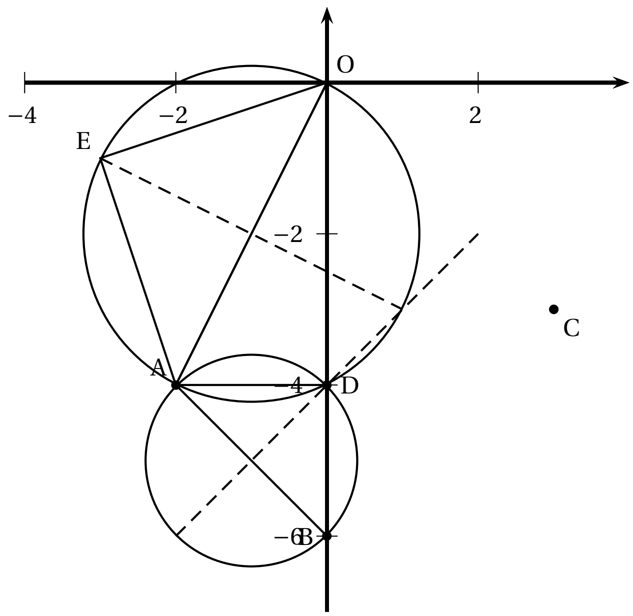
Partie C : deuxième méthode

1. Par définition de la rotation on a :
$z_{\text{O}'} - z_{\text{C}} = \text{i}\,(z_{\text{O}} - z_{\text{C}}) \iff z_{\text{O}'} - (3-3\text{i}) = \text{i}\,(0 - 3 + 3\text{i}) \iff z_{\text{O}'} = 3 - 3\text{i} - 3\text{i} - 3 =$
$z_{\text{O}'} = -6\text{i} = z_{\text{B}}$.
Par définition de la rotation CO = CB et $\left(\overrightarrow{\text{CO}},\ \overrightarrow{\text{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle OBC est rectangle isocèle en C.

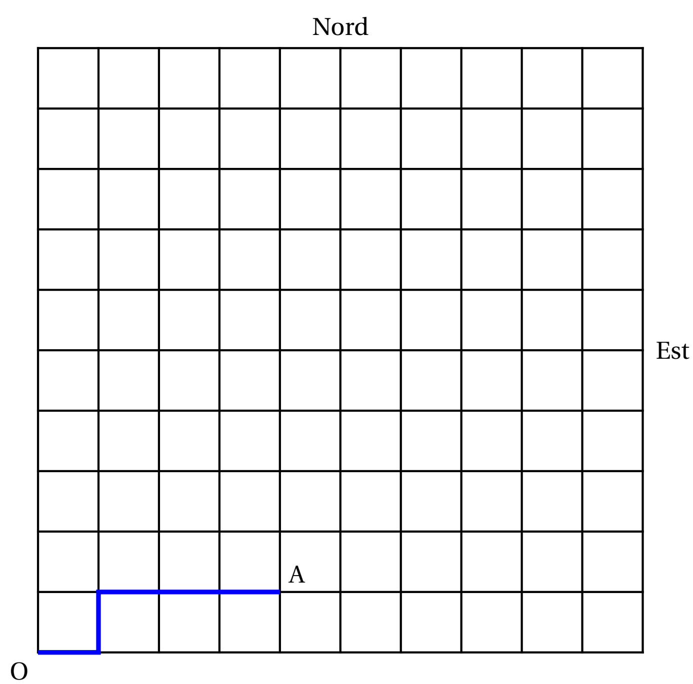
2. **a.** L'angle de la similitude composée est égale à la somme des angles des deux similitudes soit $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.
Le rapport de la similitude composée est égale au produit des rapports des deux similitudes soit $\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

b. $h \circ f$ est donc une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ soit un quart-de-tour.
L'image de la droite (BC) est une droite perpendiculaire à (BC).
Or B a pour image par f, B, puis B a pour image par h : D.
C a pour image par f, O, puis O a pour image par h : E.
Conclusion : la droite (BC) a pour image par $h \circ f$ la droite perpendiculaire (DE).

c. On a (DE) $\perp$ (BC) et comme la composée est une rotation il y a conservation des longueurs, donc DE = BC.



Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats



Partie A - Dénombrement

1. Le mot comporte 4 E et 1 N. Le nombre de chemins est égal au nombre de positions de la lettre N parmi les quatre lettres E; on peut mettre cette lettre N en position 1, 2, 3, 4 ou 5. Il y a donc 5 chemins pour aller de O à A.
   NEEE, ENEEE, EENEE, EEENE, EEEEN.
2. Un mot décrivant un chemin comporte p E et q N : sa longueur est donc égale à $p+q$.
3. En généralisant le cas particulier précédent, le nombre de chemins permettant d'arriver au point $(p\ ;\ q)$ est égal au nombre de positions des déplacements p parmi les $p+q$ déplacements qui constituent le chemin. Il y a donc $\binom{p+q}{p}$ (ou $\binom{p+q}{p}$ d'ailleurs) chemins différents.
4. Exemple : pour arriver au point (7 ; 5) il y a $\binom{7+5}{7} = \binom{7+5}{5} = \dfrac{12!}{7!5!} = \dfrac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 11\times 9\times 8 = 11\times 72 =$ 792 chemins
5. Le nombre de chemins amenant à A est égal à 5 (question 1).
   Le nombre de chemins de A à C est le même que le nombre de chemins de l'origine au point de coordonnées (7 - 4 ; 5 - 1) = (3 ; 4) soit $\binom{7}{3} = 35$.

Il y a donc $5\times 35 = 175$ chemins allant en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

1. Il faut trouver les points dont la somme des coordonnées est égale à 5, soit :
   (5 ; 0), (4 ; 1), (3 ; 2), (2 ; 3), (1 ; 4), (0 ; 5)
2. À chaque nœud la probabilité d'aller vers le Nord est égale à $\frac{2}{3}$ et les choix sont indépendants les uns des autres; la variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{3}$
3. La probabilité qu'il arrive en A est égale à $p(X=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 5\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3^4} = \frac{10}{3^5} = \frac{10}{243} \approx 0,041$.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = +\infty$ car $\dfrac{x}{\ln x}$ est l'inverse de $\dfrac{\ln x}{x}$.
   Quand x tend vers 1, avec $x > 1$, $\ln x$ tend vers 0 avec $\ln x > 0$. Comme le numérateur tend vers 1, on a $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x}{\ln x} = +\infty$.
2. f quotient de fonctions dérivables sur $]1\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{\ln x - \frac{1}{x}\times x}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.
   Donc le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $\ln x - 1$.
   On a $\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff \ln x > \ln \mathrm{e} \iff x > \mathrm{e}$ (par croissance de la fonction exponentielle.
   De même $\ln x - 1 < 0 \iff x < \mathrm{e}$.
   Enfin $\ln x - 1 = 0 \iff x = \mathrm{e}$.
   La fonction f est donc décroissante sur $]1\ ;\ \mathrm{e}[$ et croissante sur $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$,
   $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}} = \mathrm{e}$ étant le minimum de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.
3. On vient de voir que f est croissante sur $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ et que $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ est le minimum, donc si $x \geqslant \mathrm{e}$, $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

1. On a $u_0 = 5$, $u_1 = f(u_0) = \dfrac{5}{\ln 5} \approx 3,11$, $u_2 = f(u_1) \approx 2,74$.

De A_0 on trace la verticale jusqu'à $\mathscr{C}$; de ce point l'horizontale jusqu'à la courbe d'équation $y = x$; de ce nouveau point la verticale jusqu'à l'axe des abscisses rencontré en A_1 et l'on recommence. Il semble que la suite est décroissante vers l'abscisse (ou l'ordonnée) du point commun à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{D}$.

2. **a.** *Initialisation* On a $u_0 = 5 > \text{e}$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité Soit n entier, tel que $u_n \geqslant \text{e}$, comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on a vu lors de l'étude de la fonction f que si $x \geqslant \text{e}$, alors $f(x) \geqslant \text{e}$, donc $u_{n+1} \geqslant \text{e}$.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$, donc par le principe de récurrence on a démontré que quel que soit le naturel n, $u_n \geqslant \text{e}$.

b. Soit $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \dfrac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n \ln u_n}{\ln u_n} = \dfrac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$.

Comme $u_n \geqslant \text{e}$, $\ln u_n > \ln \text{e}$ soit $\ln u_n > 1 > 0$ et comme $u_n > 0$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ est celui de la différence $1 - \ln u_n$.

Or on vient de voir que $\ln u_n > 1 \iff 1 - \ln u_n < 0$.

Conclusion $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite est décroissante et minorée par e : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant \text{e}$.

d. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f étant continue car dérivable on a par limite au voisinage de l'infini : $\ell = f(\ell) \iff \ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell} \iff 1 = \dfrac{1}{\ln \ell} \iff \ln \ell = 1 \iff \ell = \text{e}$ par croissance de la fonction exponentielle et car $\ell > 0$.

La suite converge donc vers e.

3. L'algorithme affichera la valeur 3 : la croissance de la suite est très rapide : les trois premières décimales de e sont déjà trouvées.

ANNEXE

Exercice 4

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie