∽ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ∽ septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** De $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

2. $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

   On a donc $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle). On peut donc en déduire que f est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$.

   De même $f'(x) < 0 \iff x < \mathrm{e}^{-1}$ et $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$.

   On a $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1$. On a donc le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ suivant :

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>e^{-1}</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>-1</td><td>↘</td><td>$-\mathrm{e}^{-1}-1$</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

3. Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$, $f(x) \leqslant -1 < 0$. l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

   Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est continue car dérivable et strictement monotone croissante : il y a donc une bijection de $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ sur $\left[-\mathrm{e}^{-1}-1\,;\,+\infty\right[$.

   Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   La calculatrice donne successivement : $1,7 < \alpha < 1,8$, puis $1,76 < \alpha < 1,77$.

4. La question précédente montre que :
   — sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
   — $f(\alpha) = 0$;
   — sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.

5. On a $f(\alpha) = 0 \iff \alpha\ln\alpha - 1 = 0 \iff \alpha\ln\alpha = 1 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ (car $\alpha \neq 0$).

Partie B : Calcul d'une intégrale

1. On sait que sur l'intervalle $[\alpha\,;\,4]$ la fonction f est positive, que $\alpha < 4$, donc l'intégrale est (en unité d'aire) l'aire de la surface hachurée limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.

2. Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & x \\ v(x) & = & \ln x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$

   Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur l'intervalle $[\alpha\,;\,4]$, on peut donc faire une intégration par parties :

$I = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_{\alpha}^{4} - \displaystyle\int_{\alpha}^{4} \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_{\alpha}^{4} - \displaystyle\int_{\alpha}^{4} \dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}\right]_{\alpha}^{4} =$

$8\ln 4 - 4 - \left(\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \dfrac{\alpha^2}{4}\right) = 8\ln 4 - 4 + \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha.$

3. $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{4} (x\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x - \int_{\alpha}^{4} 1\,\mathrm{d}x = J - [x]_{\alpha}^{4} = 8\ln 4 - 4 + \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - 4 + \alpha.$

On a vu que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, donc :

$I = 8\ln 4 - 4 + \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\alpha^2}{2\alpha} - 4 + \alpha = 8\ln 4 - 4 + \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{\alpha}{2} - 4 + \alpha = 8\ln 4 - 8 + \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} = 8\ln 2^2 - 8 + \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} =$

$16\ln 2 - 8 + \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$

De l'encadrement trouvé $1,76 < \alpha < 1,77$, on déduit successivement :

$3,0976 < \alpha^2 < 3,1329 \Rightarrow 00,7744 < \dfrac{\alpha^2}{4} < 0,783225$

et $0,88 < \dfrac{\alpha}{2} < 0,885$ et finalement : $4,7444 < I < 4,768225$.

On a donc $I \approx 4,8$ (u. a.) à 0,1 près.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $\overrightarrow{\text{AB}}(2\,;\,-8\,;\,-2)$, $\overrightarrow{\text{AC}}(3\,;\,0\,;\,1)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont les trois points distincts A, B et C définissent un plan.

   b. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2 - 8 + 6 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 3 - 3 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc un vecteur normal au plan (ABC).

   c. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 1x + 1y - 3z + d = 0$. En particulier $\text{C}(2\,;\,2\,;\,2) \in (\text{ABC}) \iff 1\times 2 + 1\times 2 - 3\times 2 + d = 0 \iff d = 2$.
   Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff x + y - 3z + 2 = 0$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{p}(1\,;\,-1\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (P).
   Or $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{p}$ ne sont pas colinéaires, ce qui signifie que les plans (ABC) et P ne sont pas parallèles donc sécants.

   b. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in D \iff M(x\,;\,y\,;\,z) \in \left\{\begin{array}{rcl} x + y - 3z + 2 & = & 0 \\ x - y + z - 4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 3t - 2 \\ x - y & = & -t + 4 \quad (1) \\ z & = & t \end{array}\right. \Rightarrow$
   $2x = 2t + 2 \iff x = t + 1$.
   En remplaçant dans l'équation (1) $y = x + z - 4 = z + 1 + z - 4 = 2t - 3$.
   Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in D \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t + 1 \\ y & = & 2t - 3 \\ z & = & t \end{array}\right.$

3. **a.** Le point de D correspondant à $t = 1$ est le point I.

   b. Calculons $\Omega\text{I}^2 = (2-3)^2 + (-1-1)^2 + (1-3)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$, donc $\Omega\text{I} = 3$: le point I appartient à la sphère S.

   c. Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $\Omega M^2 = 9 \iff (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.
   Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à D et à S si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations : $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 + t \\ y & = & -3 + 2t \\ z & = & t \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 & = & 9 \end{array}\right. \Rightarrow$

$(1+t-3)^2+(-3+2t-1)^2+(t-3)^2=9 \iff t^2+4-4t+4t^2+16-16t+t^2+9-6t=9 \iff$
$6t^2-26t+20=0 \iff 3t^2-13t+10=0.$

On sait que I appartient à S donc $t=1$ est une des des solutions de l'équation du second degré.

Or $3t^2-13t+10=(t-1)(3t-10)$; donc l'autre solution est donnée par $3t-10=0 \iff t=\dfrac{10}{3}$, valeur du paramètre qui conduit à $\text{J}\left(\dfrac{13}{3}\,;\,\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ communs à P et au plan d'équation $z=5$ ont leurs cordonnées qui vérifient :

$\begin{cases} z &=& x^2+y^2\\ z &=& 5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 &=& 5\\ z &=& 5\end{cases}$

Ces points appartiennent donc au cercle situé dans le plan d'équation $z=5$, cercle de centre $(0\,;0\,;5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b. De même Les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ communs à P et au plan d'équation $y=1$ ont leurs cordonnées qui vérifient :

$\begin{cases} z &=& x^2+y^2\\ y &=& 1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z &=& x^2+1\\ y &=& 1\end{cases}$

On reconnaît une parabole (de sommet $(0\,;0\,;1)$ située dans le plan d'équation $y=1$.

2. a. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in S \iff \text{O}M^2=R^2=6 \iff x^2+y^2+z^2=6.$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in S \iff x^2+y^2+z^2=6$$

b. Les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ communs à P et à la sphère S ont leurs cordonnées qui vérifient :

$\begin{cases} z &=& x^2+y^2\\ x^2+y^2+z^2 &=& 6\end{cases} \Longrightarrow z+z^2=6 \iff z^2+z-6=0.$

Cette équation du second degré a une solution évidente : 2 ; l'autre est donc -3.

Or $z=-3=x^2+y^2$ ne correspond à aucun point puisque $x^2+y^2\geqslant 0$.

Il reste donc la solution : $z=2=x^2+y^2$.

Les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ communs à P et à la sphère S sont donc des points du cercle centré en $(0\,;0\,;2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3. a. Le couple solution $(-1\,;\,-1)$ est évident.

b. De $\begin{cases} -3x+2y &=& 1\\ -3\times(-1)+2\times(-1) &=& 1\end{cases} \Longrightarrow$ (par différence)

$-3(x+1)+2(y+1)=0 \iff 2(y+1)=3(x+1) \quad (1).$

2 divise donc $3(x+1)$, mais (Gauss) comme il est premier avec 3, il divise $x+1$.

Il existe donc un entier k tel que $x+1=2k \iff x=2k-1$.

En reportant le résultat $x+1=2k$ dans (1), on obtient $2(y+1)=3\times 2k \iff y+1=3k \iff y=3k-1$.

Les couples solutions sont donc de la forme $(2k-1\,;\,3k-1), \quad k\in\mathbb{Z}$.

D'après le résultat précédent un point de coordonnées entières appartient au plan si ses coordonnées sont de la forme $(2k-1\,;\,3k-1), \quad k\in\mathbb{Z}$; ils appartiennent de plus à P si et seulement si :

$z=x^2+y^2=(2k-1)^2+(3k-1)^2=4k^2+1-4k+9k^2+1-6k=13k^2-10k+2.$

Il reste à trouver les points tels que $z\leqslant 25$.

$z\leqslant 25 \iff 13k^2-10k+2\leqslant 25 \iff 13k^2-10k-23\leqslant 0$

L'équation $13k^2 - 10k - 23 = 0$ a une solution évidente -1 ; l'autre est donc $\dfrac{23}{13}$.
Le trinôme $13k^2 - 10k - 23$ est négatif entre ses deux racines, donc les valeurs convenables de k vérifient :

$$-1 \leqslant k \leqslant \frac{23}{13} < 2$$

Il n'y a donc que trois valeurs possibles :
$k = -1$, soit le point $(-3~;~-4~;~25)$;
$k = 0$, soit le point $(-1~;~-1~;~2)$;
$k = 1$, soit le point $(1~;~2~;~5)$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A :

1. **a.** On a $|p|^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1 = \text{OP}^2$, donc $|p| = \text{OP} = 1$.
Comme $q = \overline{p}$, OQ = OP = 1.
Les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
b. Voir à la fin. Les points P et Q ont tous les deux une partie réelle égale à $-\dfrac{1}{2}$: ils appartiennent donc à la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et au cercle Γ. Voir à la fin de l'exercice.
2. **a.** Soit le point K d'affixe -1. On a :
$|z| = |z+1| \iff |z-0| = |z-(-1)| \iff \text{O}M = \text{K}M$, donc les points M sont équidistants de O et de K.
L'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$ est donc la médiatrice du segment [OK].
b. Γ. On sait déjà que OP = 1 ; calculons $\text{KP}^2 = \left(-\dfrac{1}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, donc
KP = 1 et $\text{P} \in D$.
De même OQ = 1 et $\text{KQ}^2 = \left(-\dfrac{1}{2} - (-1)\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$, donc
KQ = 1 et $\text{Q} \in D$.
Conclusion : les points P et Q sont les deux points communs au cercle Γ et à la médiatrice D.

Partie B :

1. **a.** O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, donc OA = OB = OC ou encore $|a| = |b| = |c|$.
On a $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|} = 1$; même démonstration pour $\left|\dfrac{b}{a}\right| = 1$.
b. O est le centre de gravité du triangle ABC ou encore l'isobarycentre des trois points A, B, C ce qui signifie que $a + b + c = 0$.
c. De la question précédente on déduit : $c = -(a+b)$ d'où pour les modules
$|c| = |-(a+b)| = |a+b|$.
On a donc $\left|\dfrac{c}{a}\right| = \dfrac{|-(a+b)|}{|a|} = \dfrac{|(a+b)|}{|a|} = \left|\dfrac{a+b}{a}\right| = \left|1 + \dfrac{b}{a}\right|$.
Finalement $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a} + 1\right| = 1$.

d. On a vu dans la partie A que les seuls complexes z tels que $|z| = |z+1|$ étaient les complexes p et q. Donc on a $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$.

2. a. $\dfrac{q-1}{p-1} = \dfrac{-\frac{1}{2}-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-1} = \dfrac{-\frac{3}{2}-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}}{-3+\text{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\left(-3-\text{i}\sqrt{3}\right)\left(-3-\text{i}\sqrt{3}\right)}{\left(-3+\text{i}\sqrt{3}\right)\left(-3-\text{i}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{9-3+6\text{i}\sqrt{3}}{9+3} = \dfrac{6+6\text{i}\sqrt{3}}{12} =$
$\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. $\dfrac{q-1}{p-1} = \dfrac{\frac{c}{a}-1}{\frac{b}{a}-1} = \dfrac{\frac{c-a}{a}}{\frac{b-a}{a}} = \dfrac{c-a}{b-a}$.

c. Les deux résultats précédents montrent :

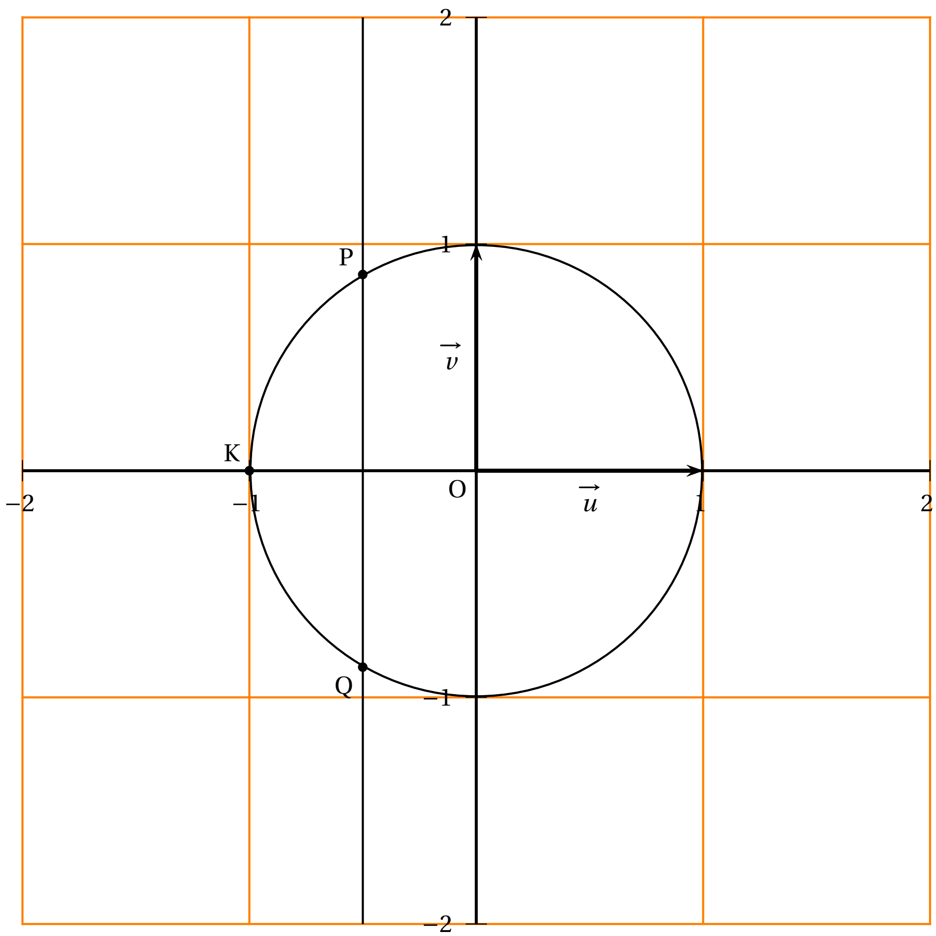
- en termes de modules que $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \left|\dfrac{q-1}{p-1}\right| = \left|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$.

On a donc $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1 \iff \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \iff |c-a| = |b-a| \iff \text{AC} = \text{AB}$, donc le triangle ABC est isocèle en A.

- en termes d'arguments que $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\dfrac{q-1}{p-1}\right) = \arg\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

On a donc $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

L'angle au sommet du triangle ABC mesure $\dfrac{\pi}{3}$, donc les deux autres angles aussi : le triangle ABC est donc équilatéral.

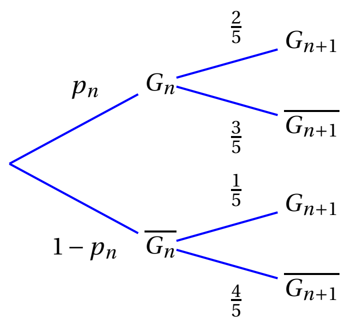


Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :
$p_{n+1} = p\left(G_{n+1}\right) = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{1}{5}\left(1-p_n\right) = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. **a.** Pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{4} =$ (d'après la question précédente)
$\dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$.
L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n$ montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

   b. On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $u_n = u_1 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} =$
$u_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.
Comme $u_n = p_n - \dfrac{1}{4} \iff p_n = u_n + \dfrac{1}{4}$, on a finalement :
$$p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

   c. Comme $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.
Au bout d'un très grand nombre de parties, la probabilité de gagner sera proche d'une chance sur quatre.

Partie B :

1. **a.** Les épreuves étant identiques et indépendantes, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

   b. On a $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - \dbinom{10}{0} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^0 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \dfrac{3^{10}}{4^{10}} \approx 0,943 \approx 0,94$, à 10^{-2} près.

   c. On a $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = n \times p = 10 \times \dfrac{1}{4} = 2,5$.

2. **a.** Le joueur doit payer 30 € pour les 10 parties et récupérera en moyenne $2,5 \times 8 = 20$ €. (espérance de gagner 2,5 parties sur 10).

   En moyenne les 10 parties coûteront $30 - 20 = 10$ €, soit 1 € par partie. Le jeu est donc désavantageux.

   b. Pour réaliser un bénéfice supérieur à 40 €, vu la mise de 30 €, il faut gagner plus de 70 €. Comme $8 \times 8 = 64$, il faut donc gagner 9 parties au moins sur 10 ($9 \times 8 = 72$).

   On a $p(\mathrm{X} = 9) + p(\mathrm{X} = 10) = \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 10 \times \frac{3}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} =$
   $\frac{31}{4^{10}} \approx 0,000\,029\,56 \approx 0,000\,03$.