∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾
septembre 2008

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

— la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

— la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
   b. Calculer S_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Étant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :
$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$
2. On considère les points A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} - \text{i}$, B d'affixe $z_\text{B} = \sqrt{3} + \text{i}$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.
   a. Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.
   b. Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
   c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{v}$.
   a. Placer les points D et E sur une figure.
   b. Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_\text{E} = \frac{1}{2}\left[1 + \text{i}\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.
   c. Montrer que OE = BE = $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

4. Montrer que les points A, C et E sont alignés.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)}\\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)}\end{array}\right.\text{, où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}}$.
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles $\text{O}A_nA_{n+1}$?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}B_n}, \overrightarrow{\text{O}B_{n+2}}\right)$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\text{e}^x}{\text{e}^x + 3}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   c. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_1$.
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 3}\right)^2$$

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. **a.** Que peut-on dire de la tangente $\mathcal{D}_2$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
   b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_2$.
4. **a.** Montrer que la tangente $\mathcal{D}_3$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.
   b. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
   Tracer la courbe $\mathcal{C}$, les tangentes $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.
6. **a.** Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}$.
   b. Soit λ un réel strictement négatif.
   On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
   Montrer que $\mathcal{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda} + 3\right)$.
   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.
On note
 V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »
 V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».
Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0{,}06$.

2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?
3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

   On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.
4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

   On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

   Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.