∾ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ∾ 16 juin 2017

EXERCICE 1 **3 points**

1. On a $1^4+2\times 1^3-1-2=1+2-1-2=0$, donc 1 est solution de (E).
2. Soit $z\in\mathbb{C}$, alors :

$$\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right)=z^4+z^3+z^2+z^3+z^2+z-2z^2-2z-2=z^4+2z^3-z-2.$$

3. D'après la question précédente, l'équation (E) équivaut à

$$z^2+z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+z+1=0$$

   - l'équation $z^2+z-2=0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta=9$; elle possède donc deux solutions réelles qui sont -2 et 1 ;
   - l'équation $z^2+z+1=0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta=-3$, elle possède deux solutions complexes conjuguées qui sont $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   - Les solutions de (E) sont donc : -2, 1, $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Notons :
   - A le point d'affixe $a=1$,
   - B le point d'affixe $b=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
   - C le point d'affixe $c=-2$,
   - D le point d'affixe $d=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Les nombres complexes b et d étant conjugués, la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC) (qui n'est rien d'autre que l'axe réel). Les diagonales du quadrilatère ABCD sont donc perpendiculaires.

   De plus le milieu de [AC] a pour affixe $\frac{a+c}{2}=-\frac{1}{2}$ et le milieu de [BD] a pour affixe $\frac{b+d}{2}=\frac{b+\overline{b}}{2}=\frac{2\mathrm{Ré}(b)}{2}=-\frac{1}{2}$. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent donc en leur milieu. On peut alors conclure que le quadrilatère ABCD est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** La courbe de la fonction de densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$. Or $22{,}8=\mu-2{,}2$ et $27{,}2=\mu+2{,}2$.
   On en déduit donc, par symétrie, que $P(X\leqslant 22{,}8)=P(X\geqslant 27{,}2)=0{,}023$ et donc que

$$P(22{,}8\leqslant X\leqslant 27{,}2)=1-2\times 0{,}023=0{,}954.$$

   La probabilité qu'une pièce soit conforme est donc de 0,954.

   b. D'après le cours, on sait que lorsque X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ_1 on a $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}954$.
   En comparant avec le résultat de la question 1, on peut donc en déduire que $2\sigma_1=2{,}2$ d'où $\sigma_1=1{,}1$.

   c. On a, à 10^{-3} près :

$$\begin{aligned}
P_{(22{,}8\leqslant X\leqslant 27{,}2)}(X\leqslant 24) &= \frac{P\left((X\leqslant 24)\cap(22{,}8\leqslant X\leqslant 27{,}1)\right)}{P(22{,}8\leqslant X\leqslant 27{,}2)}\\
&= \frac{P(22{,}8\leqslant X\leqslant 24)}{P(22{,}8\leqslant X\leqslant 27{,}2)}\\
&= \frac{0{,}1589}{0{,}954}\\
&= 0{,}167.
\end{aligned}$$

2. **a.** À espérance μ égale, les courbes de Gauss à écart-type « petit » sont plus regroupées autour de μ. Comme avec le deuxième procédé de nickelage la probabilité qu'une pièce soit conforme est supérieure à celle du premier procédé, on peut penser que $\sigma_2 < \sigma_1$. On peut retrouver ce résultat par un calcul, en centrant et en réduisant :

$$22{,}8 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 27{,}2 \iff -\frac{2{,}2}{\sigma_2} \leqslant \frac{\mathrm{Y}-\mu}{\sigma_2} \leqslant \frac{2{,}2}{\sigma_2}$$

Notons $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{Y}-\mu}{\sigma_2}$, alors Z suit la loi normale centrée réduite. En notant Φ la fonction de répartition de cette loi, on a alors $\Phi\left(\frac{2{,}2}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(-\frac{2{,}2}{\sigma_2}\right) = 0{,}98$, ce qui équivaut, pour des raisons de symétrie, à $2\Phi\left(\frac{2{,}2}{\sigma_2}\right) - 1 = 0{,}98$, c'est-à-dire à $\Phi\left(\frac{2{,}2}{\sigma_2}\right) = 0{,}99$.

À l'aide de la fonction `fracNormale` de la calculatrice, on obtient alors que $\frac{2{,}2}{\sigma_2} = 2{,}326$, d'où $\sigma_2 = 0{,}946$. On a donc bien $\sigma_2 < \sigma_1$.

b. Avec les notations usuelles du cours, on a $n = 500$ et $p = 0{,}98$. Les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont respectées, on peut donc utiliser l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

À l'aide de la calculatrice, on a $\mathrm{I} = [0{,}967\ ;\ 0{,}993]$. Notons f la fréquence observée de pièces conformes dans l'échantillon, alors $f = \frac{550-15}{500} = 0{,}97$. On a donc $f \in \mathrm{I}$ et il n'y a pas lieu de rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. • La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $f'(a) = \mathrm{e}^a$, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ \mathrm{e}^a)$.
   • La tangente en N à $\mathscr{C}_g$ a pour coefficient directeur $g'(a) = -\mathrm{e}^{-a}$, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1\ ;\ -\mathrm{e}^{-a})$.

   On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 1 + \mathrm{e}^a \times (-\mathrm{e}^{-a}) = 1 - \mathrm{e}^{a-a} = 1 - 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc les deux droites sont perpendiculaires.

2. **a.** On peut conjecturer que, pour tout réel a, PQ = 2.

   b. • **Détermination de** P. La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a.$$

   P est un point de cette droite, d'ordonnée 0 et d'abscisse x_P, on a donc :

$$0 = \mathrm{e}^a\,(x_\mathrm{P} - a) + \mathrm{e}^a \iff \mathrm{e}^a\,(x_\mathrm{P} - a) = -\mathrm{e}^a \iff x_\mathrm{P} - a = -1 \iff x_\mathrm{P} = a - 1.$$

   Ainsi le point P a pour coordonnées $\mathrm{P}(a-1\ ;\ 0)$.

   • **Détermination de** Q. La tangente en N à $\mathscr{C}_g$ a pour équation :

$$y = -\mathrm{e}^{-a}(x-a) + \mathrm{e}^{-a}.$$

   Q est un point de cette droite, d'ordonnée 0 et d'abscisse x_Q, on a donc :

$$0 = -\mathrm{e}^{-a}\left(x_\mathrm{Q} - a\right) + \mathrm{e}^{-a} \iff \mathrm{e}^{-a}\left(x_\mathrm{Q} - a\right) = \mathrm{e}^{-a} \iff x_\mathrm{Q} - a = 1 \iff x_\mathrm{Q} = a + 1.$$

   Ainsi le point Q a pour coordonnées $\mathrm{Q}(a+1\ ;\ 0)$.

   • **Calcul de** PQ. Les points P et Q étant situés sur l'axe des abscisses, la distance entre ces deux points est donnée par :

$$\mathrm{PQ} = \left|x_\mathrm{P} - x_\mathrm{Q}\right| = |(a-1) - (a+1)| = |a - 1 - a - 1| = |-2| = 2.$$

   La conjecture est démontrée.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour tout réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a donc le même signe que $1 - \ln(x)$. Or :

$$1 - \ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \geqslant \ln(x) \Longleftrightarrow \mathrm{e} \geqslant x$$

Par ailleurs on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée), $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (par croissance comparée) et $f(\mathrm{e}) = \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Remarque : les limites n'étaient pas exigées dans l'énoncé.

2. D'après le tableau de variation précédent, la fonction f a pour maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et ce maximum est atteint en $x = \mathrm{e}$.

Partie B

1. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$, alors $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, la fonction f est continue (car dérivable), et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ sur $\left[f(1)\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right] = \left[0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
Le nombre $\frac{1}{n}$ appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

2. **a.** Les abscisses inférieures à e des points d'intersection entre les droite D_3, D_4, D_5 et la courbe $\mathscr{C}$ sont les nombre α_3, α_4 et α_5. Graphiquement, on lit que $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$, il semble donc que la suite (α_n) soit décroissante.

   b. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Par définition de la suite (α_n), on a $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, on a donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$.
   Supposons que $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, alors, la fonction f étant croissante sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, cela entraînerait que $f(\alpha_n) \leqslant f(\alpha_{n+1})$, ce qui est faux. Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $\alpha_n > \alpha_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (α_n) est décroissante.

   c. La suite (α_n) est décroissante, minorée (par 1), elle est donc convergente.

3. **a.** Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Par définition de β_n, on a :

$$f(\beta_n) = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \ln(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n}.$$

   La suite (β_n) est croissante, donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ on a $\beta_n \geqslant \beta_3 > 0$. La fonction ln étant croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, ceci implique que $\ln(\beta_n) \geqslant \ln(\beta_3)$, c'est-à-dire que $\frac{\beta_n}{n} \geqslant \frac{\beta_3}{3}$. On en déduit bien que $\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}$.

   b. $\beta_3 > 0$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\frac{\beta_3}{3} = +\infty$.
   Par comparaison à l'infini, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont donc pas alignés. Ils définissent bien un plan (ABC).

b. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0 + 0\times(-1) + 4\times 1 = 4$,

c. D'autre part :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos(\widehat{\text{BAC}}) = \sqrt{2^2+0^2+4^2}\times\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\times\cos(\widehat{\text{BAC}}) = \sqrt{40}\cos(\widehat{\text{BAC}}).$$

On en déduit que $\cos(\widehat{\text{BAC}}) = \frac{4}{\sqrt{40}}$. À l'aide de la calculatrice : $\widehat{\text{BAC}} \approx 50{,}8°$ soit 51°au degré près.

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une base du plan (ABC). De plus

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 2 + (-1)\times 0 + (-1)\times 4 = 4 - 4 = 0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0 + (-1)\times(-1) + (-1)\times 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AC}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).

b. Une équation cartésienne de (ABC) est alors de la forme $2x - y - z + d = 0$. Le point $A(-1;2;0)$ appartient à ce plan donc $-2 - 2 = d = 0$ d'où $d = 4$. Une équation cartésienne de (ABC) est donc $2x - y - z + 4 = 0$.

3. a. Un vecteur normal au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$ est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. Ce vecteur est également un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$ puisque ces deux plans sont parallèles. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est donc : $x - 2z + d = 0$. Et comme $O(0;0;0)\in\mathscr{P}_2$ cela conduit à $d = 0$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est donc $x - 2z = 0 \iff x = 2z$.

b. Le plan $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n_2}$, par conséquent les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont ni parallèles ni confondus : ils sont sécants.

c.
- Pour tout réel t, on a $3(2t) + (-4t - 3) - 2t + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$ donc la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}_1$.
- Pour tout réel t, on a $(2t) - 2(t) = 0$, donc la droite $\mathscr{D}$ et incluse dans le plan $\mathscr{P}_2$.

Ces deux plans étant sécants selon une droite, cette droite n'est autre que la droite $\mathscr{D}$.

4. Soit M un point de $\mathscr{D}$, alors il existe un réel t tel que $M(2t;-4t-3;t)$. D'où :

$$M\in(\text{ABC}) \iff 2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0 \iff 7t + 7 = 0 \iff t = -1$$

La droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) n'ont donc qu'un seul point commun, obtenu pour $t = -1$, c'est le point $I(-2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n = 9\times 2^n - 6$ ». Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**. On a $u_0 = 3$ et $9\times 2^0 - 6 = 9 - 6 = 3$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité**. Supposons que, pour n entier naturel, $n \geqslant 0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $u_n = 9 \times 2^n - 6$, donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + 6 \\ & = & 2\left(9 \times 2^n - 6\right) + 6 \\ & = & 9 \times 2 \times 2^n - 12 + 6 \\ & = & 9 \times 2^{n+1} - 6 \end{array}$$

  et la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n supérieur ou égal à zéro, elle est vraie au rang $n+1$.
  D'après le principe de la récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. 3 divise 9, 2 divise 2^n, 2 et 3 sont premiers entre eux, donc $2 \times 3 = 6$ divise 9×2^n. Il est par ailleurs clair que 6 divise -6 donc 6 divise la combinaison $9 \times 2^n - 6$. En d'autres termes, 6 divise u_n.

3. L'affirmation est fausse. En effet on a $v_6 = \frac{u_6}{6} = \frac{9\times 2^6 - 6}{6} = \frac{570}{6} = 95$ qui n'est pas un nombre premier.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$v_{n+1} - 2v_n = \frac{9 \times 2^{n+1} - 6}{6} - 2 \times \frac{9 \times 2^n - 6}{6} = \frac{9 \times 2^{n+1} - 6 + 9 \times 2^{n+1} + 12}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la relation précédente, il existe deux entiers a et b tels que $av_n + bv_{n+1} = 1$. Le théorème de Bézout permet alors de conclure que v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 6v_n$, $u_{n+1} = 6v_{n+1}$. De plus v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux. On peut alors conclure que $\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 6$.

5. a. On a $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ donc $2^4 \equiv 1$ [5].

b. Soit $k \in n$, et $n = 4k+2$, alors :

$$u_n = 9 \times 2^{4k+2} - 6 = 9 \times (2^4)^k \times 2^2 - 6.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{array}{rcl} u_n & \equiv & 9 \times 1^k \times 4 - 6 \quad [5] \\ & \equiv & 4 \times 1 \times 4 - 1 \quad [5] \\ & \equiv & 15 \quad [5] \\ & \equiv & 0 \quad [5] \end{array}$$

Le nombre u_n est alors divisible par 5.

c. Le nombre u_n n'est pas divisible par 5 pour les autres valeurs de n, en effet on a $u_0 = 3$ comme contre-exemple immédiat.