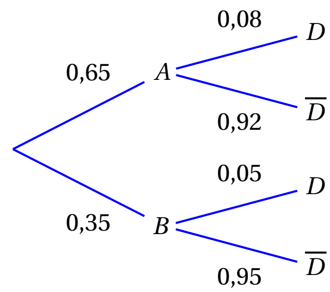
Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2016

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** Arbre pondéré :



b. Les évènements A et B forment une partition de l'univers, on a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p\left(\overline{D}\right) = p\left(A \cap \overline{D}\right) + p\left(B \cap \overline{D}\right) = 0{,}65 \times 0{,}92 + 0{,}35 \times 0{,}95 = 0{,}9305.$$

c. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{D}}(A) = \frac{p\left(A \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \frac{0{,}65 \times 0{,}92}{0{,}9305} = 0{,}6427$$

2. Soit X le nombre d'ampoules sans défaut. Les choix d'ampoules étant assimilés à un tirage successif avec remise, on est en présence d'un schéma de Bernoulli et X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}92$ (les ampoules sont issues de la machine A). Par conséquent, à l'aide de la calculatrice :

$$p(X \geqslant 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = 10 \times 0{,}92^9 \times 0{,}08 + 0{,}92^{10} \approx 0{,}8121.$$

Partie B

1. **a.** On a $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-\lambda a} + 1$, donc

$$p(T \geqslant a) = p(\overline{T \leqslant a}) = 1 - p(T \leqslant a) = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda a} + 1\right) = \mathrm{e}^{-\lambda a}.$$

b. On a :

$$\begin{aligned}
p_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + a) &= \frac{p\big((T \geqslant t + a) \cap (T \geqslant t)\big)}{p(T \geqslant t)} \\
&= \frac{p(T \geqslant t + a)}{p(T \geqslant t)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+a)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda(t+a-t)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda a} \\
&= p(T \geqslant a).
\end{aligned}$$

2. **a.** D'après le cours $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{1}{E(T)} = \dfrac{1}{10000} = 0{,}0001$.

   b. On a $p(T \geqslant 5000) = \mathrm{e}^{-0{,}0001 \times 5000} = \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$.

   c. Il s'agit de calculer $p_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12000)$. Puisque la loi est sans vieillissement :

$$p_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12000) = p_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 7000+5000) = p(T \geqslant 5000) \approx 0{,}6065.$$

Partie C

1. On fait l'hypothèse que la proportion d'ampoules défectueuses est $p = 0{,}06$. L'échantillon est de taille $n = 1000$.
   On a $n \geqslant 30$, $np = 60 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 940 \geqslant 5$. Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont respectées, et, en notant I, cet intervalle on a :

$$\begin{aligned} I &= \left[0{,}06 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times 0{,}94}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0{,}06 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times 0{,}94}}{\sqrt{1000}}\right] \\ &= [0{,}0452\ ;\ 0{,}0748] \end{aligned}$$

2. Notons f la fréquence observée d'ampoules défectueuses dans l'échantillon, on a $f = \dfrac{71}{1000} = 0{,}071$. On constate que $f \in I$, il n'y a donc pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Notons A le point d'affixe 2. Soit M un point d'affixe z, alors $AM = |z-2|$. Par conséquent :

$$M \in \mathscr{C} \iff |z-2| = 1 \iff AM = 1.$$

   L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre A et de rayon 1.

2. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $z - 2 = (x-2) + \mathrm{i}y$ et $|z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Par conséquent,

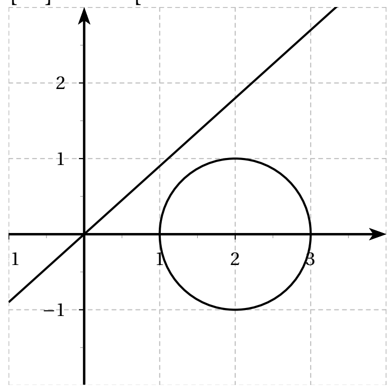
$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D} &\iff \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (x-2)^2 + y^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (1+a^2)x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ et } y = ax \end{aligned}$$

   $(1+a^2)x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (1+a^2) \times 3 = 4 - 12a^2$. On a donc :

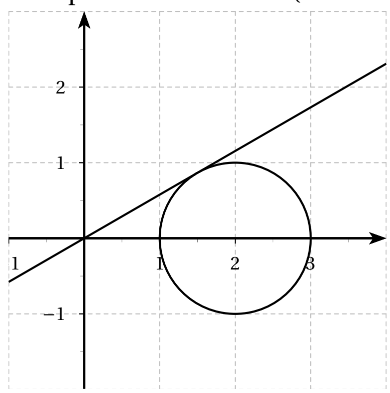
$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff 4 - 12a^2 > 0 \\ &\iff a^2 < \frac{1}{3} \\ &\iff -\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

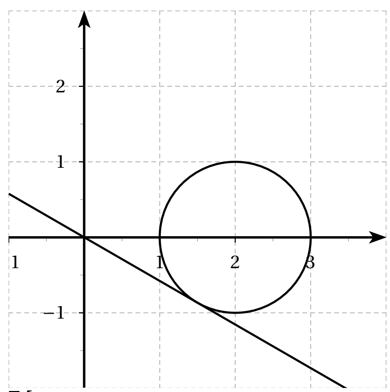
   On peut alors distinguer trois cas :

— **Premier cas.** $a \in \left]-\infty\,; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\,; \infty\right[$: aucun point d'intersection.

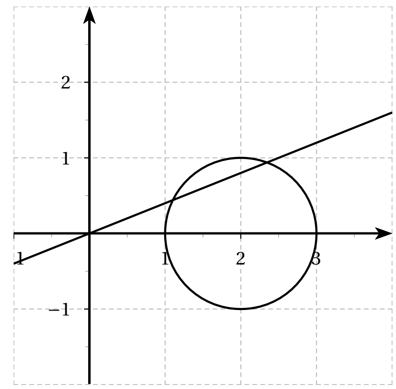


— **Deuxième cas.** $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$: un seul point d'intersection (la droite et le cercle sont tangents).





— **Troisième cas.** $a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$: deux points d'intersection.



EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = x\text{e}^{1-x^2} = x \times \dfrac{\text{e}}{\text{e}^{-x^2}} = \dfrac{\text{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$. Par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}}{x} = 0. \tag{1}$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\text{e}^t}{t} = +\infty$. Par composée des limites on alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$, puis par inverse :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\text{e}^{x^2}} = 0, \tag{2}$$

enfin, par produit de (1) et (2) on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

2. a. On utilise la dérivée d'un produit, ainsi que la dérivée des fonctions de la forme e^u :

$$f'(x) = 1\text{e}^{1-x^2} + x \times (-2x)\text{e}^{1-x^2} = \text{e}^{1-x^2} - 2x^2\text{e}^{1-x^2} = \left(1-2x^2\right)\text{e}^{1-x^2}.$$

b. Pour tout réel x, $\text{e}^{1-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1-2x^2$. Or :

$$1-2x^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\text{e}} = \sqrt{\dfrac{\text{e}}{2}}$; de même $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\dfrac{\text{e}}{2}}$. On en déduit de ce qui précède le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{\frac{\text{e}}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{\text{e}}{2}}$	$\searrow$	0

Partie B

1. Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit toujours au dessous de $\mathscr{C}_g$.
2. Soit x un réel tel que $x \leqslant 0$, alors $x\text{e}^{1-x^2} \leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant 0$, alors que $g(x) = \text{e}^{1-x} > 0$ par conséquent il est clair que $f(x) < g(x)$.
3. **a.** Soit x un réel tel que $x > 0$, alors, par application de la fonction ln qui est strictement croissante :

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant g(x) &\iff x\text{e}^{1-x^2} \leqslant \text{e}^{1-x} \\ &\iff \ln x + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \\ &\iff \ln x - x^2 + x \leqslant 0 \\ &\iff \Phi(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

b. On a $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x}$. Comme $x > 0$, $\Phi'(x)$ a le même signe que $-2x^2 + x + 1$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 9$ et pour racines $-\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi :

$$-2x^2 + x + 1 > 0 \iff -\frac{1}{2} < x < 1.$$

On a $\Phi(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$. Sur $]0\ ;\ +\infty[$ le tableau de variation (sans limite) de Φ est donc :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

c. Le tableau de variation précédent montre que la fonction Φ possède en 1 un maximum qui vaut 0, autrement dit, pour tout réel $x > 0$, on a $\Phi(x) \leqslant 0$.

a. D'après B 1 et B 3 c, on a, pour tout réel x, $f(x) \geqslant g(x)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc toujours en dessous de $\mathscr{C}_g$.

b. Sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on a $f(x) < g(x)$ les courbes n'y ont donc aucun point commun.
Sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$. Ces deux courbes ont donc un unique point commun A dont l'abscisse est 1.

c. On a $f(1) = g(1) = 1$. De plus $f'(1) = (1-2\times 1^2)\text{e}^{1-1^2} = -1$, et $g'(x) = -\text{e}^{1-x}$ donc $g'(x) = -\text{e}^{1-1} = -1$, donc $f'(1) = g'(1)$. Au point d'abscisse 1, les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passe par un même point, et ont même coefficient directeur, elles sont donc confondues.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0+1\times(-1)+1\times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\times(-1)+1\times 0+1\times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$(DF)\perp(BG) \quad \text{et} \quad (DF)\perp(BE).$$

La droite (DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BGE), elle est donc orthogonale à ce plan, et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est donc un vecteur normal au plan (BGE).

b. Les plans $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc également un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Ce dernier a donc une équation cartésienne du type :

$$x+y+z+d = 0$$

où d est un réel à déterminer. Le plan $\mathscr{P}$ passe par le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$, donc

$$\frac{1}{2}+1+0+d = 0 \iff d = -\frac{3}{2}.$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc $\boxed{x+y+z-\frac{3}{2} = 0}$.

2. Les plans $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles. Leurs intersections respectives avec le plan (ABE) sont donc deux droites parallèles. L'une de ces droites est (IN), l'autre est (BE). Ainsi dans le triangle ABE les droites (IN) et (BE) sont parallèles et I est le milieu de $[AB]$, donc d'après le théorème « de la droite des milieux » le point N est le milieu de $[AE]$.

3. a. La droite (HB) passe par le point $H(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z & = & 1-t \end{array}\right. .$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (HG) est le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un unique point T. Comme $T\in(HG)$, il existe un réel t tel que $T(t\ ;\ t\ ;\ 1-t)$. Alors :

$$T\in\mathscr{P} \iff t+t+1-t-\frac{3}{2} = 0 \iff t = \frac{1}{2},$$

les coordonnées de T sont donc $T\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

4. Le tétraèdre $FBGE$
— a pour base le triangle FBG qui est rectangle isocèle en F et a pour aire $\mathscr{B} = \frac{1}{2}\times FE\times FB = \frac{1}{2}$;

— pour hauteur $h = FE = 1$.
Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $FBGE$ est donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. L'algorithme complété est le suivant :

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  Pour Y variant de −5 à 10
                      Si 7*X−3*Y=1 alors :
                          Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. **a.** Le couple (1, 2) est une solution particulière de (E) car $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$.

b. Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs, alors :

$$\begin{aligned} (x,\ y) \text{ solution de (E)} &\iff 7x - 3y = 7 \times 1 - 3 \times 2 \\ &\iff 7(x-1) = 3(y-2) \end{aligned}$$

Ainsi 3 divise $7(x-1)$, or 3 et 7 sont premiers entre eux, donc, par le théorème de Gauss, 3 divise $x - 1$. Il existe donc un entier relatif k tel que
$x - 1 = 3k \iff x = 1 + 3k$. On obtient alors $7 \times 3k = 3(y-2)$ d'où $y = 2 + 7k$.
Réciproquement, on vérifie aisément que les couples du type
$(1 + 3k\ ;\ 2 + 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont bien solutions de (E).

c. Soit $(x,\ y)$ un couple solution de (E), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1 + 3k$ et $y = 2 + 7k$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{rcccl} -5 & \leqslant & x & \leqslant & 10 \\ -5 & \leqslant & y & \leqslant & 10 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcccl} -5 & \leqslant & 1+3k & \leqslant & 10 \\ -5 & \leqslant & 2+7k & \leqslant & 10 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcccl} -2 & \leqslant & k & \leqslant & 3 \\ -1 & \leqslant & k & \leqslant & \frac{8}{7} \end{array}\right. \\ &\iff k \in \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}. \end{aligned}$$

Il n'y a donc que trois couples vérifiant les conditions demandées :

$$(-2,\ 5) \qquad (1,\ 2) \qquad \text{et} \qquad (4,\ 9).$$

Partie B

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$MX_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

b. La suite (X_n) est géométrique de raison M et de premier terme M_0, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$X_n = M^n X_0.$$

2. **a.** On a, à l'aide de la calculatrice :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{15}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

c. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

— **Initialisation.** On a $M^0 = I_3$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3), et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité.** Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque on ait $M^n = PD^nP^{-1}$, on doit alors montrer que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
On a

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times P^{-1}P \times DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

— **Conclusion.**
La relation est vraie au rang 0 et pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque $M^n = PD^nP^{-1}$ entraîne $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} X_n &= M^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} + 12 - \frac{12}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} + 30 - \frac{28}{2^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2^n} \\ -5 + \frac{7}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = -2 + \frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \frac{7}{2^n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $A_n\left(-2 + \frac{3}{2^n}\ ;\ -5 + \frac{7}{2^n}\right)$ et

$$7\left(-2 + \frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5 + \frac{7}{2^n}\right) - 1 = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} - 1 = -15 + 15 = 0$$

ce qui prouve bien que $A_n \in \mathscr{D}$.