

**Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane**

**22 juin 2015**

**EXERCICE 1**

**6 POINTS**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

1. Pour toutes les courbes, on a  $g_a(1) = a$ . Donc on a de bas en haut les courbes  $\Gamma_{0,05}$ ,  $\Gamma_{0,1}$ ,  $\Gamma_{0,19}$  et  $\Gamma_{0,4}$ .
2. Les courbes  $\Gamma_{0,05}$  et  $\Gamma_{0,1}$  semblent sécantes à  $\mathcal{C}$  en deux points;  
 La courbe  $\Gamma_{0,19}$  semble être tangente à  $\mathcal{C}$ ;  
 La courbe  $\Gamma_{0,4}$  et  $\mathcal{C}$  semblent ne pas être sécantes.  
 Il semble donc que :
  - si  $0 < a < 0,19$ ,  $\Gamma_a$  et  $\mathcal{C}$  ont deux points communs;
  - si  $a = 0,19$ ,  $\Gamma_{0,19}$  et  $\mathcal{C}$  ont un point commun;
  - si  $a > 0,19$ ,  $\Gamma_a$  et  $\mathcal{C}$  n'ont pas de point commun.

**Partie B**

1. Si  $m(x; y) \in \mathcal{C} \cap \Gamma_a$ , alors  $\ln x = ax^2 \iff \ln x - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0$ .  
 Le nombre de points communs à  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  est donc égal au nombre de solutions de l'équation  $h_a(x) = 0$ .
2. a.

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$h'_a(x)$		+	-
$h_a(x)$	$-\infty$	$\frac{-1 - \ln(2a)}{2}$	

On a en fait :  $h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$ .

Comme  $x > 0$  et  $a > 0$ , le signe de  $h'_a(x)$  est celui de  $1 - 2ax^2$ .

Or  $1 - 2ax^2 = 0 \iff 1 = 2ax^2 \iff \frac{1}{2a} = x^2 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ .

D'où le tableau de variation de  $h_a$ .

b. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Comme  $h_a(x) = x \left( \frac{\ln x}{x} - 2ax \right)$ , on a donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - 2ax = -\infty$  et par produit de limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - 2ax \right) = -\infty$ .

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = 0,1$ .

a.  $h_{0,1}(x) = 0 \iff \ln x - 0,1x^2 = 0.$

Soit  $i$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $i(x) = \ln x - 0,1x^2$ ; cette fonction est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$i'(x) = \frac{1}{x} - 0,2x.$$

$$\text{or } i'(x) = 0 \iff \frac{1}{x} - 0,2x = 0 \iff 1 = 0,2x^2 \iff 5 = x^2 \iff x = \sqrt{5}.$$

$$\text{On a de même } i'(x) > 0 \iff \frac{1}{x} - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x^2 \iff 5 > x^2 \iff x < \sqrt{5}.$$

Sur l'intervalle  $]0; \sqrt{5}[$ , la fonction  $i$  est continue et strictement croissante de  $-\infty$  à

$\ln \sqrt{5} - 0,1 \times (\sqrt{5})^2 = \frac{1}{2} \ln 5 - 0,5 \approx 0,3 > 0$  : la fonction  $i$  s'annule donc une seule fois sur cet intervalle.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle  $]\sqrt{5}; +\infty[$ .

b. D'après la question précédente la courbe  $\Gamma_0$ , et  $\mathcal{C}$  ont deux points communs : l'un sur  $]0; \sqrt{5}[$  et l'autre sur  $]\sqrt{5}; +\infty[$ .

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2e}$ .

a. Le tableau de variations montre que le maximum de  $h_{\frac{1}{2e}}$  est égal à  $\frac{-1 - \ln \frac{1}{e}}{2} = \frac{-1 + \ln e}{2} = 0.$

b. Le maximum étant nul, on en déduit que  $h_{\frac{1}{2e}}(x) \leq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{2e}x^2$ ; autrement dit  $\mathcal{C}$  est sous

$\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ , sauf pour  $x = \frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2e}}} = \sqrt{e}$  où elles ont un seul point commun.

5. On a vu que  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation  $h_a(x) = 0$  n'a pas de solution, c'est-à-dire lorsque le maximum de la fonction  $h_a$  est inférieur à zéro, soit :

$$\frac{-1 - \ln(2a)}{2} < 0 \iff -1 - \ln(2a) < 0 \iff \ln 2a > -1 \iff e^{\ln 2a} > e^{-1} \iff 2a > e^{-1} \iff$$

$$a > \frac{1}{2e} \approx 0,18394 \approx 0,19.$$

## EXERCICE 2

5 POINTS

### Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

#### Partie A

1. D'après l'indication :

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \left[ -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - \left[ -\left(0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \times 0} \right] =$$

$$\frac{1}{\lambda} - \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} [1 - x\lambda e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}]$$

2. De  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , on en déduit avec  $\lambda > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$  et aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\lambda e^{-x} = 0$ .

$$\text{Conclusion : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

#### Partie B

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a. Voir la surface hachurée sur l'annexe 2 à la fin.

- b. On lit comme ordonnée à l'origine  $\lambda = 0,5$ .
2. On suppose que  $E(X) = 2$ .
- a.  $E(X) = 2$  signifie que la durée de vie d'un composant est en moyenne égale à 2 ans.
- b. On a vu que  $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5$ .
- c. On a :
- $$P(X \leq 2) = \int_0^2 \lambda e^{-0,5t} dt = [-e^{-0,5t}]_0^2 = -e^{-0,5 \times 2} - (-e^{-0,5 \times 0}) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \approx 0,632 \approx 0,63 \text{ au centième près. Ce résultat est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à l'espérance } E(X).$$
- d. Il faut trouver :
- $$P_{(X \geq 1)}(X \geq 3) = P_{(X \geq 1)}(X \geq 2) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \approx 0,368.$$

### Partie C

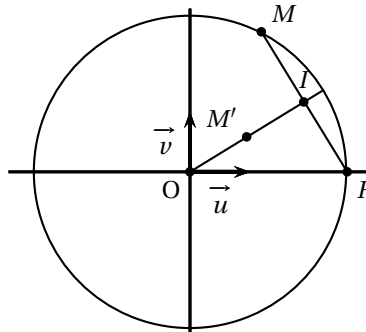
1. Les événements  $D_1$  et  $D_2$  sont indépendants, donc :
- $$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521.$$
2. Ici la probabilité est égale à :
- $$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279.$$

### EXERCICE 3

4 POINTS

Commun à tous les candidats

#### Partie A



1. Puisque  $OM = OR$ , on a  $|z_M| = |z_R| = |z|$ .  
Comme  $R$  a un argument égal à  $0$  à  $2\pi$  près on a  $z_R = |z|$ .
- 2.

$$z' = \frac{1}{2} \left( \frac{z + |z|}{2} \right).$$

L'affixe de  $\frac{z + |z|}{2}$  est égale à la demi-somme des affixes de celles de  $M$  et de  $R$ . Le point ayant cette affixe est donc le milieu  $I$  du segment  $[MR]$ .  
Finalement le point  $M'$  est le milieu de  $[OI]$ .

#### Partie B

1. Si  $z_0$  est un nombre réel négatif, on a  $|z_0| = -z_0$ . D'où  $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = \frac{z_0 - z_0}{4} = 0$  et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers 0.

2. Si  $z_0$  est un nombre réel positif, on a  $|z_0| = z_0$ . D'où

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = \frac{z_0 + z_0}{4} = \frac{z_0}{2}, \text{ puis } z_2 = \frac{z_1 + |z_1|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2} + \frac{z_0}{2}}{4} = \frac{z_0}{4}.$$

Montrons par récurrence que  $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ .

*Initialisation* : on vu que la relation est vraie pour  $n = 0$ .

*Hérédité* : supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ ; alors

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^{n-1}}}{4} = \frac{z_0}{2^{n+1}} : \text{ la relation est vraie au rang } n+1.$$

On a montré que  $z_0 = \frac{z_0}{2^0}$  et que si pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \frac{z_0}{2^n}$  alors  $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$

On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel  $n$ ,  $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ .

La suite  $(z_n)$  est donc une suite géométrique de premier terme  $z_0$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Comme  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ , on sait que cette suite converge vers 0.

3. a. D'après la première construction, le module de  $z'_M$  est inférieur à celui de  $z_M$  et son argument est égal à la moitié. On peut donc conjecturer que la suite  $(|z_n|)$  va elle aussi converger vers 0.

b. On sait (inégalité triangulaire) que pour tous complexes  $z_1$  et  $z_2$ , que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En appliquant cette inégalité à  $\frac{z_n}{4}$  et à  $\frac{|z_n|}{4}$ , on obtient :

$$|z_{n+1}| \leq \left| \frac{z_n}{4} \right| + \left| \frac{|z_n|}{4} \right| \text{ ou encore } |z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{4} \text{ ou } |z_{n+1}| \leq \frac{|z_n|}{2}.$$

On montre de la même façon que précédemment par récurrence que  $|z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$ .

La suite  $\left(\frac{|z_0|}{2^n}\right)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  qui converge vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes la suite  $(|z_n|)$  converge elle aussi vers 0.

#### EXERCICE 4

5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

#### Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Demander la valeur de $p$
Traitement :	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher $u$

valeur de $k$	1	2	
valeur de $u$	5	1	-0,5

On obtient en sortie : -0,5.

#### Partie B

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Algorithme modifié :

Variables :	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Demander la valeur de $p$
Traitement :	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Afficher $u$
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque  $u_4 > u_3$  la suite  $(u_n)$  n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. *Initialisation* On vient de voir que  $u_4 > u_3$  : la relation est vraie pour  $n = 3$ .

*Hérédité* On suppose que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  on ait  $u_{n+1} > u_n$ .

D'où  $0,5u_{n+1} > 0,5u_n$  ; D'autre part :  $n + 1 > n \Rightarrow 0,5(n + 1) > 0,5n$  d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{n+1} + 0,5(n + 1) > 0,5u_n + 0,5n$  et en ajoutant  $-1,5$  à chaque membre :

$0,5u_{n+1} + 0,5(n + 1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5n - 1,5$  soit  $u_{n+2} > u_{n+1}$  : la relation est vraie au rang  $n + 1$ .

On a donc démontré que  $u_4 > u_3$  et que pour  $n$  entier naturel supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} > u_n$  entraîne  $u_{n+2} > u_{n+1}$  ce qui montre d'après le principe de récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 4.

4. Pour tout naturel  $n$ , on a :  $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n + 1) + 0,5 = 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 =$

$0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 =$   
 $0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$  : la suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est :  $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$ .

On a donc pour tout naturel  $n$ ,  $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n = \frac{1}{2^n}$ .

5. On a  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff$   
 $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$ .

6. Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . La suite  $(u_n)$  ne converge pas.

#### EXERCICE 4

5 POINTS

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

#### Partie A

1.

valeur de $a$	26	9	8
valeur de $b$	9	8	1
valeur de $c$	8	1	0
Affichage			1

2.

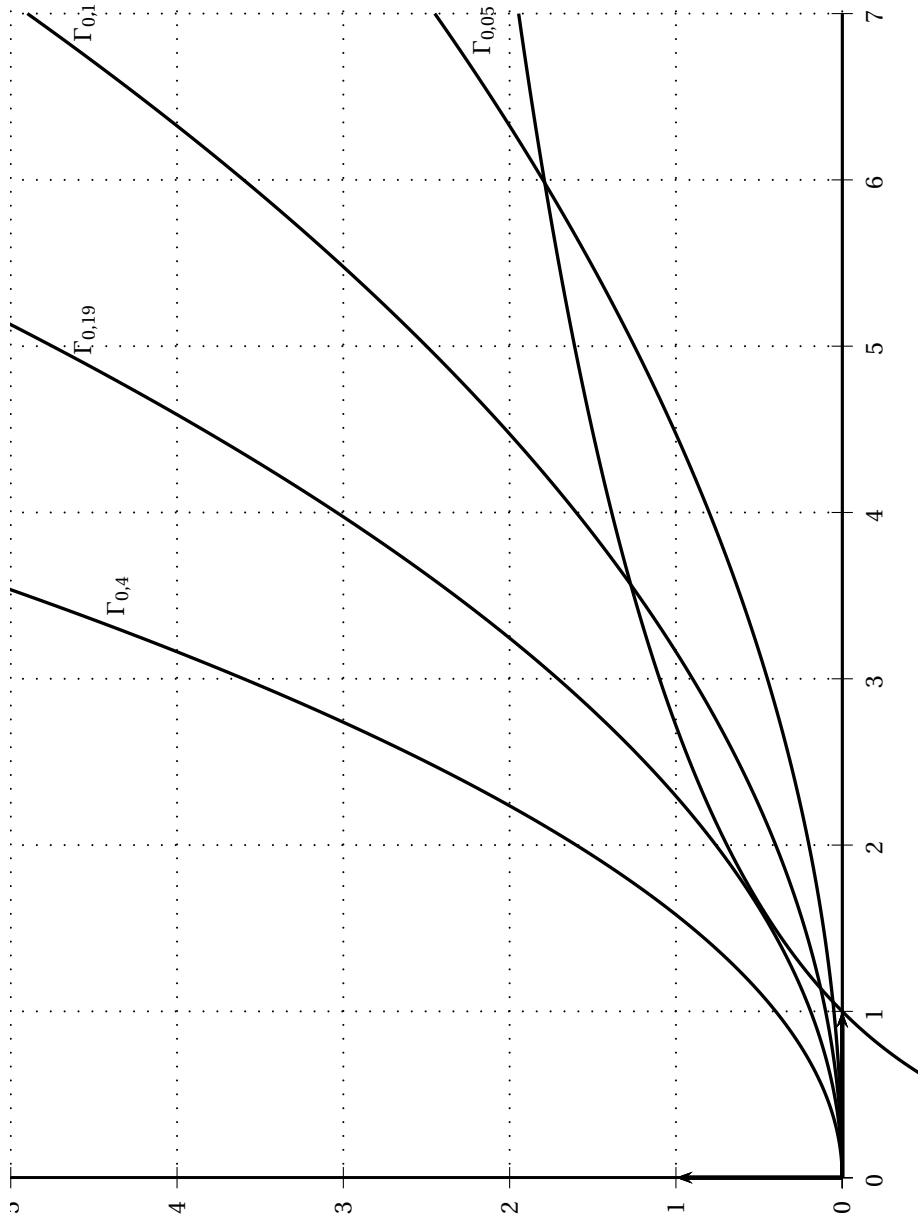
Variables :	$c$ est un entier naturel $a$ et $b$ sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander $a$ Demander $b$
Traitement :	Affecter à $c$ le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à $a$ le nombre $b$ Affecter à $b$ la valeur de $c$ Affecter à $c$ le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que
Sortie :	Si $b = 1$ Afficher « les nombres entrés sont premiers entre eux » Sinon Afficher « les nombres entrés ne sont pas premiers entre eux » Fin de Si

### Partie B

1. Dans cette question, on choisit  $p = 9$  et  $q = 2$ .
  - a. Dans le tableau V correspond à 21, or  $9 \times 21 + 2 = 189 + 2 = 191$  et  $191 = 26 \times 7 + 9$ ; donc  $x' \equiv 9 \pmod{26}$ .  
Dans le tableau 9 correspond à la lettre J.
  - b. 9 et 26 étant premiers entre eux, le théorème de Bezout permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $9u + 26v = 1$ .  
Le couple  $(3; -1)$  est un couple simple solution de cette équation.
  - c. On a  $x' \equiv 9x + 2 \pmod{26} \iff$  il existe  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x' = 26k + 9x + 2 \iff$   
 $3x' = 26k' + 27x + 6 \iff 3x' = 26k' + 26x + x + 6 \iff 3x' = 26r'' + x + 6 \iff x = 26(-r'') + 3x' - 6 \iff$   
 $x = 26(-r'') + 3x' + 20$ , soit  $x \equiv 3x' + 20 \pmod{26}$
  - d. R correspond à  $x' = 17$ , donc  $3x' + 20 = 51 + 20 = 71$  et  
 $71 = 26 \times 2 + 19$ , soit  $71 \equiv 19 \pmod{26}$ .  
On a donc  $x = 19$  qui correspond à la lettre T.
2. J correspond à  $x = 9$  et D correspond à  $x' = 3$ . de plus  $q = 2$ ; on a donc :  
 $3 = 9p + 2 \pmod{26} \iff 9p \equiv 1 \pmod{26}$  ou encore  $27p \equiv 3 \pmod{26}$ , mais on sait que  $27 \equiv 1 \pmod{26}$ ; il en résulte que  $p \equiv 3 \pmod{26}$  et comme  $p$  est compris entre 0 et 25, on a donc  $p = 3$ .
3. B correspond à  $x = 1$ , d'où  $x' = 13x + 2 \equiv 15 \pmod{26}$  et 15 correspond à la lettre P.  
D correspond à  $x = 3$ , d'où  $x' = 13x + 2 \equiv 41 \pmod{26}$  et  $41 \equiv 15 \pmod{26}$  et 15 correspond à la lettre P.  
Conclusion : deux lettres différentes sont codées par la même lettre. Ce codage n'est pas bon puisque le décryptage donnera plusieurs solutions.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



## À RENDRE AVEC LA COPIE

## ANNEXE 2 de l'exercice 2

