

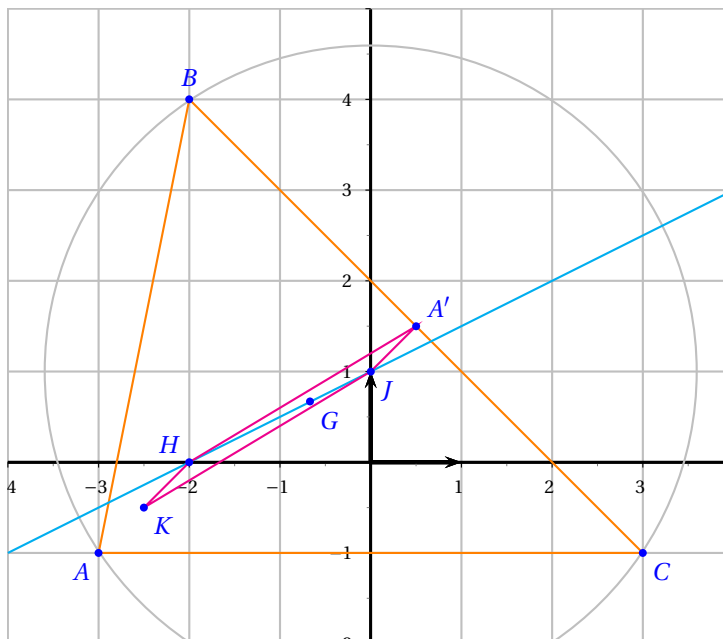
Corrigé du baccalauréat S
Antilles-Guyane 16 juin 2011

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. Figure :



2. $JA = |j - a| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. On trouve de même que $JB = \sqrt{13}$ et que $JC = \sqrt{13}$. Le cercle circonscrit au triangle ABC a donc pour centre J et pour rayon $\sqrt{13}$.

3. On a : $\frac{b-c}{h-a} = \frac{-5+5i}{1+i} = \frac{(-5+5i)(1-i)}{2} = 5i$.

Par conséquent : $(\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{CB}) = \arg(5i) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$, ce qui prouve que $(AH) \perp (BC)$.

4. G est l'isobarycentre du système $\{A; B; C\}$ donc, d'après le cours :

$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-3-i-2+4i+3-i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

5. Le vecteur \overrightarrow{HJ} a pour affixe $j - h = 2 + i$, le vecteur \overrightarrow{JG} a pour affixe $g - j = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$. On a donc $g - j = -\frac{1}{3}(j - h)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{HJ}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, les points J, G et H sont donc alignés, ce qui se vérifie sur la figure.

6. a. Notons k l'affixe du point K , alors : $k = \frac{a+h}{2} = \frac{-3-i-2}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$.

b. Le vecteur \overrightarrow{KH} a pour affixe $h - k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et le vecteur $\overrightarrow{JA'}$ a pour affixe $a' - j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Ces deux vecteurs ayant même affixe, ils sont égaux, et le quadrilatère $KHA'J$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

1. a. — Il n'y a aucune forme indéterminée, d'après les limites usuelles :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$, donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 — La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. Comme $x \geq 0$ et $e^x > 0$, alors $f'(x) \geq 0$ et la fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- b. La fonction f est continue (car dérivable), strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur l'intervalle $\left]f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right[=]-1; +\infty[$. Comme $0 \in]-1; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
 À l'aide de la calculatrice $\alpha \simeq 0,57$ à 10^{-2} près.
- c. $f(\alpha) = 0$ et f est croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit donc que :
 — si $0 \leq x < \alpha$, alors $f(x) < 0$;
 — si $x > \alpha$, alors $f(x) > 0$.
2. a. Pour tout $x > 0$, on a $M(x; e^x)$ et $N(x; \ln x)$. On a donc $MN = |e^x - \ln x| = e^x - \ln x$, d'après le rappel de l'énoncé. Posons $g(x) = e^x - \ln x$, alors g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$. On a donc, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow xe^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x > \alpha.$$

Ainsi, g est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$ et décroissante sur $]0; \alpha[$. Elle admet donc un minimum en $x = \alpha$. La distance MN est donc minimale lorsque $x = \alpha$ et cette longueur minimale vaut alors $e^\alpha - \ln(\alpha) \simeq 2,33$ à 10^{-2} près.

- b. On a $f(\alpha) = 0$, donc $ae^\alpha - 1 = 0$, d'où $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.
 La tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse α a pour coefficient directeur le nombre dérivé de \exp en α , c'est-à-dire e^α .
 La tangente à Γ au point d'abscisse α a pour coefficient directeur le nombre dérivé de \ln en α , c'est-à-dire $\frac{1}{\alpha}$.
 D'après ce qui précède, ces deux valeurs sont égales; les deux tangentes ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

3. a. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $x > 0$: $h'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln x - 1 = \ln x$. h est donc une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.
- b. \mathcal{C} est au-dessus de Γ , donc, l'aire \mathcal{A} hachurée sur la figure est donnée (en unités d'aire) par :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 e^x - \ln x dx = [e^x - h(x)]_1^2 = e^2 - e - 2\ln 2 + 1 \simeq 4,28.$$

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. L'évènement « le tireur atteint la cible au moins une fois » est le contraire de l'évènement « le tireur rate toujours sa cible ». On a donc $p_n = 1 - 0,7^n$. Par conséquent :

$$p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - 0,7^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,1 \geq 0,7^n \Leftrightarrow \ln(0,1) \geq n \ln(0,7) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \leq n.$$

Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \simeq 6,4$. La plus petite valeur possible de n est donc 7 : **réponse b**).

2. La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est : $p(X > 10000) = 1 - p(X \leq 10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{10000} = e^{-0,0002 \times 10000} = e^{-2} \approx 0,135$: **réponse b).**
3. Le nombre X de fois où le joueur perd au cours d'une partie suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{6})$, donc : $p(X = 3) = \binom{5}{3} (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^2 = \frac{125}{3888}$: **réponse a).**
4. A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
L'égalité $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ devient donc :
 $0,65 = 0,3 + p(B) - 0,3p(B)$, qui équivaut à $0,35 = 0,7p(B)$, d'où $p(B) = 0,5$: **réponse a).**

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Les entiers 11 et 7 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que $11u - 7v = 1$. Par ailleurs $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$, le couple $(2; 3)$ répond alors à la question.
- b. On a, en multipliant chaque membre de la dernière égalité par 5,
 $11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$. Le couple $(10; 15)$ est donc une solution particulière de (E).
- c. Soit $(x; y)$ une solution de (E), alors $11x - 7y = 11 \times 10 - 7 \times 15$, d'où :

$$11(x - 10) = 7(y - 15). \tag{1}$$

7 divise $11(x - 10)$ et est premier avec 11, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x - 10$: il existe donc un entier relatif k tel que $x - 10 = 7k$. En remplaçant $x - 10$ par $7k$ dans (1), puis en simplifiant, on en déduit que $y - 15 = 11k$. Ainsi, si $(x; y)$ est solution de (E), alors nécessairement $(x; y)$ est de la forme $(10 + 7k; 15 + 11k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie aisément que de tels couples sont bien solutions de (E).

- d. Un point de D à coordonnées entières appartient à \mathcal{C} si et seulement si $\begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \\ 11x - 7y = 5 \\ 0 \leq x \leq 50; 0 \leq y \leq 50 \end{cases}$
- $\begin{cases} (x; y) \text{ solution de (E)} \\ 0 \leq x \leq 50; 0 \leq y \leq 50 \end{cases}$ On cherche donc tous les entiers relatifs k tels que $0 \leq 10 + 7k \leq 50$ et $0 \leq 15 + 11k \leq 50$, ce qui équivaut à $-\frac{10}{7} \leq k \leq \frac{50}{7}$ et $-\frac{15}{11} \leq k \leq \frac{35}{11}$. Les seules valeurs possibles de k sont $-1, 0, 1, 2$ et 3 . Il y a donc cinq points de \mathcal{C} donc les coordonnées sont entières :

$$A(3; 4) \quad B(10; 15) \quad C(17; 26) \quad D(24; 37) \quad E(31; 48).$$

2. a. On a $11 \equiv 1 \pmod{5}$, $7 \equiv 2 \pmod{5}$ et $5 \equiv 0 \pmod{5}$, par conséquent, si le couple $(x; y)$ est solution de (F), en « passant » aux congruences : $11x^2 - 7y^2 = 5$ devient $x^2 - 2y^2 \equiv 0 \pmod{5}$, c'est-à-dire $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
- b. On calcule aisément :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont donc 0, 1 et 4. De même, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 et 3.

- c. Si $(x; y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ ce qui n'est possible, d'après les tableaux précédents, que si $x \equiv 0 \pmod{5}$ et $y \equiv 0 \pmod{5}$, c'est-à-dire si x et y sont des multiples de 5.

3. Supposons que x et y sont deux entiers multiples de 5. Alors il existe des entiers a et b tels que $x = 5a$ et $y = 5b$. En « réinjectant » cela dans l'équation (F) on a alors : $11 \times 25a^2 - 7 \times 25b^2 = 5$, c'est-à-dire $25(11a^2 - 7b^2) = 5$, ce qui est impossible (5 n'est pas multiple de 25). L'équation (F) ne possède donc aucune solution.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \times 1 - 3 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{w}$. La droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}'(-1; 1; -1)$ et $\vec{u}' \cdot \vec{w} = 0$, donc $\vec{u}' \perp \vec{w}$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' dirigent respectivement D et D' et sont orthogonaux à \vec{w} qui est donc un vecteur directeur de Δ .
2. a. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 - 6 + 3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u}$; de même, $\vec{n} \cdot \vec{w} = 3 - 3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{w}$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{w} n'étant pas colinéaires, ils forment une base du plan P , et le vecteur \vec{n} est donc normal à ce plan.
- b. P a pour vecteur normal $\vec{n}(3; 2; 3)$. Une équation cartésienne de P est donc : $3x + 2y + 3z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. Comme $A(3; -4; 1) \in P$, on a : $3 \times 3 + 2 \times (-4) + 3 \times 1 + d = 0$, d'où $d = -4$. Une équation cartésienne de P est donc : $3x + 4y + 3z - 4 = 0$.
3. a. H' est un point de D' , il existe donc un réel t tel que $H'(-1 - t; 2 + t; 1 - t)$. Par ailleurs $H' \in P$, donc $3(-1 - t) + 4(2 + t) + 3(1 - t) - 4 = 0$, d'où, en développant, $-4t = 0$ puis $t = 0$, ce qui donne $H'(-1; 2; 1)$.
- b. La droite Δ passe par $H'(-1; 2; 1)$ et est dirigée par $\vec{w}(1; 0; -1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

4. a. $H \in D$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AH} = \lambda \vec{u}$, d'où l'on déduit $H(3 + \lambda; -4 - 3\lambda; 1 + \lambda)$. De plus H est un point commun aux droites D et Δ , il existe donc une valeur de s et une valeur de λ telles que :

$$\begin{cases} -1 + s = 3 + \lambda \\ 2 = -4 - 3\lambda \\ 1 - s = 1 + \lambda \end{cases}$$

L'équation du milieu donne $\lambda = -2$ et les deux autres donnent alors $s = 2$; on en déduit que $H(1; 2; -1)$.

b. $HH' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

5. a. D'après la relation de Chasles, $\vec{MM'} = \vec{MH} + \vec{HH'} + \vec{H'M'}$. Posons

$$\vec{v} = \vec{MH} + \vec{H'M'}, \text{ alors } \vec{v} \cdot \vec{HH'} \text{ car } (MH) \perp (HH') \text{ et } (H'M') \perp (HH').$$

- b. $\vec{MM'} = \vec{HH'} + \vec{v}$, donc $(\vec{MM'})^2 = (\vec{HH'})^2 + 2\vec{HH'} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$, comme $\vec{HH'} \cdot \vec{v} = 0$, il reste $MM'^2 = HH'^2 + \|\vec{v}\|^2$, d'où : $MM'^2 \geq HH'^2$.

La plus petite distance possible entre deux points de D et de D' est donc obtenue pour les points H et H' . La distance entre les droites D et D' est donc égale à $2\sqrt{2}$.