Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane
23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**
Commun tous les candidats

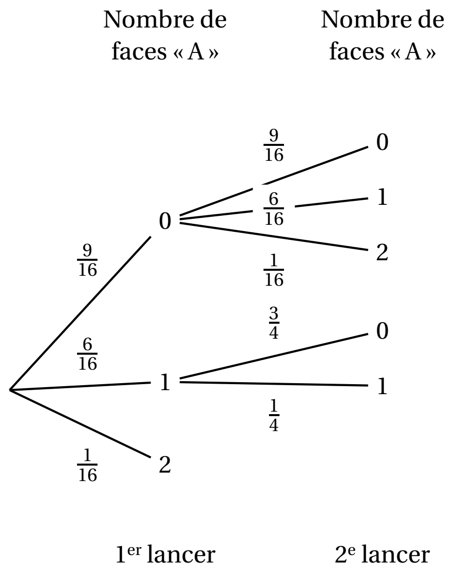
1. On peut dénombrer les cas possibles l'aide d'un tableau :

D 1 \ D 2	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

Les deux dés peuvent être supposés équilibrés, il y a donc situation d'équiprobabilité et :

$$p(E_0) = \frac{9}{16}; \qquad p(E_1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}; \qquad p(E_2) = \frac{1}{16}.$$

2. a.



b. Il y a trois façons distinctes de gagner pour le joueur :
- il obtient deux faces « A » au premier lancer, ou bien
- il obtient une face « A » au premier lancer, et une face « A » au deuxième, ou bien
- il n'obtient aucune face « A » au premier lancer, et deux faces « A » au second.

À l'aide de l'arbre pondéré ci-dessus, la probabilité de gagner est donc égale à :

$$\frac{1}{16} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{49}{256}.$$

c. Notons X la variable aléatoire désignant le gain algébrique du joueur.
- $X = 5$ lorsque le joueur gagne, donc $p(X = 5) = \dfrac{49}{256}$.

- $X = 0$ lorsqu'un seul dé repose sur la face « A », cela peut avoir lieu au premier ou au deuxième lancer, donc d'après l'arbre : $p(X=0) = \frac{9}{16} \times \frac{6}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{126}{256}$.
- $X = -5$ lorsque le joueur n'obtient aucune face « A », donc $p(X=-5) = \frac{9}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$.

On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant :

x	-5	0	5	TotalÊ
$p(X=x)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{126}{256}$	$\frac{49}{256}$	1

L'espérance mathématique de X est alors égale à :

$$E(X) = -5 \times \frac{81}{256} + 0 \times \frac{126}{256} + 5 \times \frac{49}{256} = \frac{-160}{256} < 0,$$

le jeu est donc **défavorable** au joueur.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation propose est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. D'après le cours, f est donc une similitude directe. De plus :
   - $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, donc $|a| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et f a pour rapport 2.
   - $a = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, donc $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$ (2π) et f a pour angle $\frac{\pi}{3}$.
   - $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \times 2\mathrm{i} + 2\sqrt{3} = 2\mathrm{i} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2\mathrm{i}$, donc $f(A) = A$.

   La première affirmation est donc **vraie**.
2. On a : $1991 \equiv 3$ (7). De plus $3^2 \equiv 2$ (7) et $3^3 \equiv -1$ (7) donc $3^6 \equiv 1$ (7).
   Comme $2009 = 6 \times 334 + 5$ on en déduit que : $3^{2009} \equiv (3^6)^{334} \times 3^5$ (7) c'est-à-dire $3^{2009} \equiv (-1)^{334} \times 3^2 \times 3^3$ (7), d'o : $3^{2009} \equiv 1 \times 2 \times (-1)$ (7), soit : $3^{2009} \equiv -2$ (7).
   On a finalement $1991^{2009} \equiv -2$ (7).
   La deuxième affirmation est donc **fausse**.
3. Soit a et b deux entiers relatifs quelconques, n et p deux entiers naturels premiers entre eux.
   - Supposons que $a \equiv b$ (p), alors $na \equiv nb$ (p) par compatibilité de la multiplication avec les congruences.
   - Réciproquement, supposons que $na \equiv nb$ (p). Alors p divise $na - nb$, c'est--dire p divise $n(a-b)$. Comme n et p sont premiers entre eux, le théorème de Gauss entraine que p divise $a - b$, c'est-à-dire que $a \equiv b$ (p).

   L'équivalence est donc démontrée.

   La troisième affirmation est donc **vraie**.
4. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de l'espace, alors :
   $$\left(M \in \mathscr{S}\right) \iff \left(y = 3 \text{ et } x^2 + y^2 = z\right) \iff \left(y = 3 \text{ et } x^2 + 9 = z\right).$$
   Dans le plan d'équation $y = 3$, $z = x^2 + 9$ est l'équation d'une parabole.
   La quatrième affirmation est donc **fausse**.
5. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de l'espace coordonnées entières appartenant à $\mathscr{P}$ et au plan (yOz).

- $M = O$ vérifie ces conditions, puisque $x = 0$, $0^2 + 0^2 = 3 \times 0^2$ et $0 \in \mathbb{Z}$.
- Supposons que M soit distinct de O. Alors $x = 0$ car $M \in (yOz)$. On a donc : $y^2 = 3z^2$. Comme $z \neq 0$ (car sinon y serait nul et M serait confondu avec O), on obtient $\dfrac{y^2}{z^2} = 3$, ce qui signifierait que $\dfrac{y}{z}$ est irrationnel (égal $\pm\sqrt{3}$), ce qui est faux, car $y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse « M est distinct de O » est donc absurde.
- Le seul point vérifiant les conditions précédentes est donc le point O.

La cinquième affirmation est donc **vraie**.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. $\left(M \in \mathscr{E}\right) \iff \left(AM = BM\right)$. $\mathscr{E}$ est donc bien la médiatrice du segment $[AB]$.
   La première affirmation est **vraie**.
2. $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$ entraine que : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(2i)\ (2\pi)$, c'est-à-dire que : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Le triangle ABC est donc rectangle en A, ce qui entraine que A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
   La deuxième affirmation est **vraie**.
3. Si $z = 2e^{i\frac{\pi}{7}}$, alors $z^{2009} = 2^{2009}e^{i\frac{2009\pi}{7}} = 2^{2009}e^{287i\pi}$. Par conséquent : $\arg\left(z^{2009}\right) = 287\pi\ (2\pi)$, et comme 287 est impair, cela entraine que z^{2009} est un réel strictement négatif.
   La troisième affirmation est donc **fausse**.
4. D'après le théorème de réduction : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Donc :
   $$\left(M \in \mathscr{F}\right) \iff \left(\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6\right) \iff \left(MG = 2\right).$$
   $\mathscr{F}$ est donc la sphère de centre G et de rayon 2.
   La quatrième affirmation est **vraie**.
5. La sphère $\mathscr{S}$ a pour rayon $\sqrt{5}$ et pour centre $O(0\,;\,0\,;\,0)$.
   La distance du point O au plan $\mathscr{P}$ est égale $\dfrac{|0+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.
   $\sqrt{5} < \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, donc la sphère et le plan ne sont pas sécants, et leur intersection est vide.
   La cinquième affirmation est donc **fausse**.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun tous les candidats

PARTIE A.

1. f est solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{2}y + 10$, donc d'après un théorème du cours, il existe une constante k telle que, pour tout $t \geqslant 0$:
   $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \dfrac{10}{-\frac{1}{2}} = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 20$.
   La condition $f(0) = 220$ entraine alors que $k + 20 = 220$, c'est-à-dire $k = 200$.
   Finalement :
   $$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

2. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = -100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 0;$$

la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$. On en déduit par opérations que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 20$; ce qui signifie que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 20$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c. Voir figure.

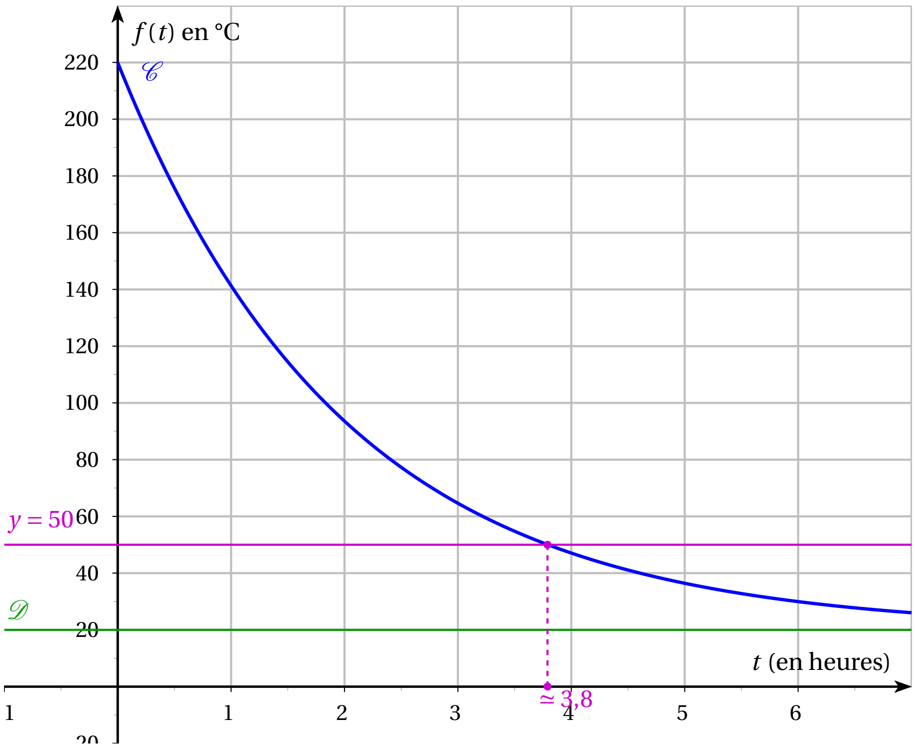


FIGURE 1 – exercice 3, question 2. c.

3. **a.** Graphiquement, $f(t) = 50$ pour $t = 3{,}8$, soit 3 heures et 48 minutes environ.

b. Résolvons :

$$\begin{aligned}
f(t) = 50 &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50\\
&\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 30\\
&\iff \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \frac{3}{20}\\
&\iff -\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right)\\
&\iff t = -2\ln\left(\frac{3}{20}\right) \simeq 3{,}79 \text{ à } 0{,}01 \text{ près}
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

PARTIE B.

1. **a.** À l'aide de la calculatrice, au dixième près :
$d_0 \simeq 78{,}7$, $d_1 \simeq 47{,}7$, $d_2 \simeq 28{,}9$.

   b. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)$ donc que : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

2. On détermine à partir de quel entier naturel n on a $d_n \leqslant 5$.

$$\begin{aligned} d_n \leqslant 5 &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} - 200\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}} \leqslant 5 \\ &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant 5 \\ &\iff 40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \\ &\iff \ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{n}{2} \\ &\iff 2\ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant n \end{aligned}$$

et comme $2\ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \simeq 5{,}5$ (au dixième près), la plus petite valeur de l'entier n partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5°C est donc $n = 6$.

Remarque : On pouvait aussi démontrer que la suite (d_n) est décroissante, puis calculer d_5 et d_6 et conclure.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun tous les candidats

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel $x \geqslant 0$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{1+x} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$ on a alors $f(x) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, d'où : $\ln(1+x) \leqslant x$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$, donc d'après la question précédente :
$\ln(u_n) \leqslant n \times \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant 1$.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leqslant 1$, donc $u_n \leqslant e$ et la suite (u_n) est majorée par e, elle ne peut donc pas diverger vers $+\infty$.

2. **a.** $v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, en posant $x = \dfrac{1}{n}$ on a donc : $v_n = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

   b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'après une limite du cours. Quand $n \to +\infty$, on a $x \to 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

   c. $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, et comme (v_n) converge vers 1, on en déduit que (u_n) converge vers e.