Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E′).
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.
6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

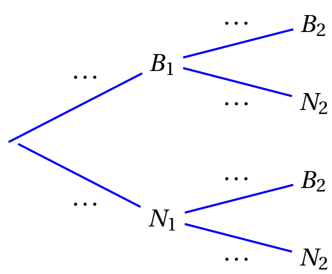
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. **a.** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
   Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
   Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

   a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
   d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
   Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
   Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
   Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation

$$\text{(E)} : \qquad 11x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :
— on calcule $11x+8$
— on calcule le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or
$129 \equiv 25\ (0\,\text{modulo}\,26)$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

   $$11x \equiv j \quad \text{(modulo 26) équivaut à } x \equiv 19j \text{(modulo 26)}.$$

   b. En déduire un procédé de décodage.

   c. Décoder la lettre W.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point;*
une réponse inexacte enlève 0,25 *point;*
l'absence de réponse est comptée 0 *point.*
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-6y+2z-7 & = & 0 \\ -x+3y-z+5 & = & 0 \end{array}\right.$ est :

   Réponse **A** : l'ensemble vide Réponse **B** : une droite
   Réponse **C** : un plan Réponse **D** : réduit à un point
2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 2-3t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & -2-t \\ z & = & 4+2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ sont :}$$

   Réponse **A** : parallèles et distinctes Réponse **B** : confondues
   Réponse **C** : sécantes Réponse **D** : non coplanaires
3. La distance du point A$(1\,;\,-2\,;\,1)$ au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

   Réponse **A** : $\dfrac{3}{11}$ Réponse **B** : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
   Réponse **C** : $\dfrac{1}{2}$ Réponse **D** : $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$
4. Le projeté orthogonal du point B$(1\,;6\,;0)$ sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

   Réponse **A** : $(3\,;1\,;5)$ Réponse **B** : $(2\,;3\,;1)$
   Réponse **C** : $(3\,;0\,;2)$ Réponse **D** : $(-2\,;3\,;-6)$

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.
Cette feuille est à rendre avec la copie.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq \text{i}$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z - \text{i}}$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1. **Un exemple**
   On considère le point K d'affixe $1 + \text{i}$.
   a. Placer le point K.
   b. Déterminer l'affixe du point K$'$ image de K par f.
   c. Placer le point K$'$.
2. **Des points pour lesquels le problème ne se pose pas**
   a. On considère le point L d'affixe $\frac{\text{i}}{2}$. Déterminer son image L$'$ par f. Que remarque-t- on ?
   b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.
3. **Un procédé de construction**
   On nomme G l'isobarycentre des points A, M, et M', et g l'affixe de G.
   a. Vérifier l'égalité $g = \frac{1}{3(z - \text{i})}$.
   b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3r}$.
   c. Démontrer que $\arg g = -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.
   d. Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.
   On nomme D$'$ l'image de D par f . Déduire des questions précédentes la construction du point D$'$ et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie.**

Annexe à rendre avec la copie

Sur la figure ci-dessous le segment [OI] tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{OI}}$ est partagé en six segments d'égale longueur.