

✎ Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane ✎ juin 2008

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A :

- (E') $\Leftrightarrow y' = -2y$. D'après le cours, les solutions de (E') sont les fonctions définies sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto Ce^{-2x}$, où C est une constante réelle.
- En particulier, avec $C = \frac{9}{2}$, on obtient la fonction h .
- g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 9e^{-3x}$. Par conséquent, pour tout réel x :

$$g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x},$$

ce qui prouve que g est bien solution de (E).

- Comme $f = g + h$, on a $f' = g' + h'$, donc, pour tout réel x :

$$f'(x) + 2f(x) = \underbrace{g'(x) + 2g(x)}_{3e^{-3x}} + \underbrace{h'(x) + 2h(x)}_0 = 3e^{-3x},$$

et f est alors bien solution de (E).

Partie B :

- $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - \frac{e^{-3x}}{e^{-2x}} \right) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$.
- **Limite de f en $-\infty$.**
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$.
De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right) = -\infty$; on en déduit, par opérations sur les limites dans l'expression de $f(x)$ obtenue à la question B1 que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 - **Limite de f en $+\infty$.**
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$; on en déduit par opérations sur les limites dans l'expression initiale de $f(x)$ que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Graphiquement, cela signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.
- f est dérivable sur \mathbb{R} (combinaison simple de fonctions qui le sont), et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2)e^{-2x} - 3 \times (-3)e^{-3x} = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-3x}(-e^x + 1).$$

Comme, pour tout réel x , $9e^{-3x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-e^x + 1$.

Or : $-e^x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \Leftrightarrow 0 \leq x$, donc $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Par ailleurs $f(0) = \frac{9}{2}e^0 - 3e^0 = \frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{3}{2} \searrow$	0

4. • **Intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe (Ox).**

On cherche les points de coordonnées $(x; f(x))$ tels que $f(x) = 0$.

D'après l'expression de la question B1, et comme pour tout réel x , $e^{-2x} \neq 0$, on

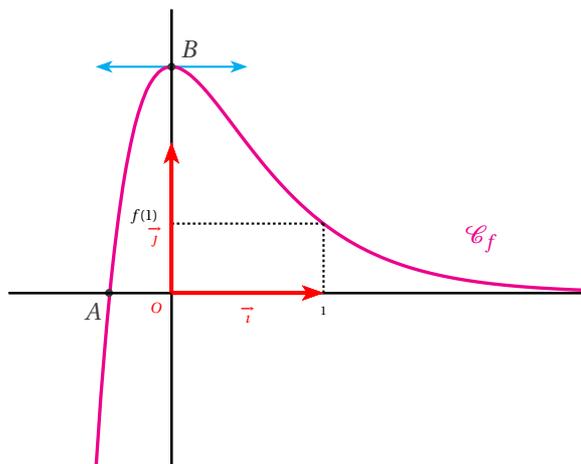
$$a : f(x) = 0 \iff \frac{3}{2} = e^{-x} \iff \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -x \iff x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \simeq -0,4 \text{ (à } 0,01 \text{ près)}.$$

La courbe \mathcal{C}_f coupe l'axe (Ox) en un seul point A de coordonnées $(\ln(\frac{2}{3}); 0)$.

• **Intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe (Oy).**

Il s'agit du point de coordonnées $B(0; f(0))$ c'est-à-dire $(0; \frac{3}{2})$.

5. $f(1) = \frac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} \simeq 0,46$ (à 0,01 près). L'allure de \mathcal{C}_f est alors la suivante :



6. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction $x \mapsto -\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}$. Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction f est positive, l'aire A cherchée est donc égale à :

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x} \right]_0^1 = \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} \right) - \left(-\frac{9}{4} + 1 \right) = -\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} + \frac{5}{4} \text{ cm}^2.$$

EXERCICE 2

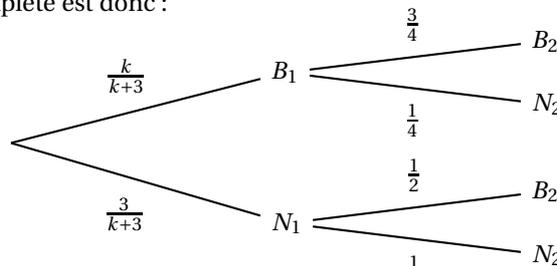
5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. a. Dans U_1 il y a k boules blanches et 3 noires, soit $k+3$ boules au total; on a donc :

$$p(B_1) = \frac{k}{k+3} \text{ et } p(N_1) = \frac{3}{k+3}.$$

Si l'on a tiré une boule blanche de U_1 il y a maintenant 3 boules blanches et une boule noire dans U_2 ; en revanche si l'on a tiré une boule noire de U_1 il y a maintenant 2 boules blanches et 2 boules noires dans U_2 . L'arbre pondéré complété est donc :



b. Les événements B_1 et N_1 étant contraires, on a $B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)$, et la formule des probabilités totales permet alors d'écrire que :

$$p(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{k}{k+3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{k+3} = \frac{3k+6}{4k+12},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. a. Si le joueur gagne, il reçoit 12 euros et en a misé 8, son gain est donc de 4 euros : $X = 4$; s'il perd, il perd sa mise et alors $X = -8$.

b. $p(X = 4) = p(B_2) = \frac{3 \times 12 + 6}{4 \times 12 + 12} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$.

$p(X = -8) = p(\overline{X=4}) = 1 - p(X = 4) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$. On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant :

x_i	-8	4	Total
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

- c. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{3}{10} \times (-8) + \frac{7}{10} \times 4 = \frac{4}{10} = 0,40$ euros.

d. Le jeu est favorable au joueur car $E(X) > 0$.

3. Les épreuves successives étant identiques et indépendantes, on a affaire à un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu l'événement B_2 suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{7}{10}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 p(Y \geq 1) \geq 0,99 &\iff p(\overline{Y=0}) \geq 0,99 \\
 &\iff 1 - p(Y=0) \geq 0,99 \\
 &\iff 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{7}{10}\right)^0 \left(\frac{3}{10}\right)^n \geq 0,99 \\
 &\iff 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n \geq 0,99 \\
 &\iff 0,01 \geq \left(\frac{3}{10}\right)^n \\
 &\iff \ln(0,01) \geq n \ln\left(\frac{3}{10}\right) \\
 &\iff \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} \leq n.
 \end{aligned}$$

Et comme $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} \approx 3,82$, le plus petit entier n répondant à la question est 4.

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

- $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1$, donc le couple $(-7; -3)$ est solution de (E).
- Soit $(x; y)$ une solution de (E), on a alors $11x - 26y = 1$ et d'après la question précédente $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = 1$ donc $11x - 26y = 11 \times (-7) - 26 \times (-3)$. On en déduit que $11(x + 7) = 26(y + 3)$. Ainsi 26 divise $11(x + 7)$, or 26 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss implique donc que 26 divise $x + 7$. Il existe donc un entier relatif k tel que $x + 7 = 26k$, c'est-à-dire $x = -7 + 26k$. On a alors $11 \times 26k = 26(y + 3)$, d'où, en divisant par 26 : $11k = y + 3$, d'où $y = -3 + 11k$. Ainsi, si $(x; y)$ est solution de (E), il existe un entier k tel que $(x; y) = (-7 + 26k; -3 + 11k)$.
 - Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions de (E); en effet : $11 \times (-7 + 26k) - 26 \times (-3 + 11k) = -77 + 286k + 78 - 286k = 1$.

- En conclusion, les solutions de (E) sont les couples de la forme $(-7 + 26k; -3 + 11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(u; v)$ est solution de (E) avec $0 \leq u \leq 25$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $u = -7 + 26k$, $v = -3 + 11k$ et $0 \leq -7 + 26k \leq 25$. Cela conduit à $7 \leq 26k \leq 32$, et $k = 1$ est la seule possibilité. L'unique couple répondant à la question est donc $(19; 8)$.

Partie B

1. La lettre W est chiffrée par $x = 22$. Or $11 \times 22 + 8 \equiv 16 \pmod{26}$, donc $y = 16$ qui correspond à la lettre Q.
2. a. • Soit x et j deux entiers relatifs tels que $11x \equiv j \pmod{26}$. Alors, en multipliant par 19 : $19 \times 11x \equiv 19j \pmod{26}$. Or $19 \times 11 = 209$ et $209 \equiv 1 \pmod{26}$, donc $x \equiv 19j \pmod{26}$.
 • Réciproquement, si $x \equiv 19j \pmod{26}$, alors, en multipliant par 11 : $11x \equiv 11 \times 19j \pmod{26}$, d'où $11x \equiv j \pmod{26}$. L'équivalence est donc démontrée.
- b. Soit y un entier compris entre 0 et 25, il s'agit de trouver un entier x compris entre 0 et 25 tel que : $11x + 8 \equiv y \pmod{26}$. Nécessairement on doit avoir : $11x \equiv y - 8 \pmod{26}$, ce qui équivaut, d'après la question précédente, à $x \equiv 19(y - 8) \pmod{26}$. Le procédé de décodage est donc le suivant :
 • on chiffre la lettre à décoder par un nombre entier y compris entre 0 et 25;
 • on calcule le reste x de la division euclidienne de $19(y - 8)$ par 26;
 • on déchiffre alors x pour obtenir la lettre décodée.
- c. W est chiffré par $y = 22$. Or $19 \times (22 - 8) \equiv 6 \pmod{26}$, donc $x = 6$, ce qui correspond à la lettre G.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. A;
2. C;
3. B;
4. C.

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

1. Un exemple.

a. Voir figure.

b. Le point K' a pour affixe $z_{K'} = \frac{-(1+i)^2}{1+i-i} = -2i$.

c. Voir figure.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.

a. L' a pour affixe $z_{L'} = \frac{-(\frac{i}{2})^2}{\frac{i}{2}-i} = \frac{-(\frac{i}{2})^2}{-\frac{i}{2}} = \frac{i}{2}$. On remarque ainsi que $L' = L$.

b. Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \neq i$. Alors :

$$\left(f(M) = M\right) \iff \left(z = \frac{-z^2}{z-i}\right) \iff \left(z(z-i) = -z^2\right) \iff \left(z(2z-i) = 0\right) \iff \left(z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}\right).$$

Il n'y a donc que deux points invariants par f : O et L.

3. Un procédé de construction.

- a. On a : $g = \frac{i+z+z'}{3} = \frac{i+z-\frac{z^2}{z-i}}{3} = \frac{(z-i)(z+i)-z^2}{3(z-i)} = \frac{z^2+1-z^2}{3(z-i)} = \frac{1}{3(z-i)}$. L'égalité est vérifiée.
- b. Soit M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors $AM = r$, donc $|z-i| = r$. D'après la relation précédente, cela implique que $|g| = \frac{1}{3r}$, donc que G appartient au cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3r}$.
- c. D'après la relation de la question 3. a. :

$$\arg g = \arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right) = -\arg(3(z-i)) = -\arg 3 - \arg(z-i) = -\arg(z-i) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM}).$$

d. Construction du point D' :

- on construit le point G , point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\frac{2}{3}$ et de la demi-droite d'origine O faisant un angle de $-(\vec{u}; \overrightarrow{AD})$ avec l'horizontale;
- G est le centre de gravité du triangle ADD' , en notant J le milieu de $[AD]$ on a donc : $\overrightarrow{JD'} = 3\overrightarrow{JG}$.

