

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud ∞  
13 novembre 2012

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Restitution organisée de connaissance

L'objet de cette question est de démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et est égale à sa fonction dérivée
- $e^0 = 1$
- Pour tout réel  $x$ , on a  $e^x > x$
- Soit deux fonctions  $v$  et  $w$  définies sur l'intervalle  $[A ; +\infty[$ , où  $A$  est un réel positif.  
Si pour tout  $x$  de  $[A ; +\infty[$ ,  $v(x) \leq w(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty$ .

a. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ .

Montrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $\varphi(x) \geq 1$ .

b. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$ .

a. Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

b. Étudier les variations de la fonction  $f$ , puis dresser son tableau de variations sur  $[0 ; +\infty[$ .

**Partie B**

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle  $g(t)$  la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant  $t$  exprimé en heures ( $t \geq 0$ ).

On constate expérimentalement que la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{2}y = 0$$

- Déterminer le réel  $a$  pour que la fonction  $u$  définie par l'équation  $u(t) = ate^{-\frac{1}{2}t}$  soit solution de l'équation (E).
  - Montrer qu'une fonction  $v$  est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction  $h = v - u$  est solution de l'équation (E').
  - Résoudre l'équation (E').
  - En déduire les solutions de l'équation (E).
2. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.

Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale est la fonction  $f$  étudiée dans la **partie A**.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable $n$ .
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$ incrémenter la variable $n$ de 1.
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de $n$ .

où  $f$  est la fonction étudiée dans la **partie A**.

- À l'aide de la question 2. a. de la **partie A**, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.
- Quelle est la valeur  $n_0$  de la variable  $n$  obtenue à la sortie de l'algorithme?
- L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question cet algorithme permet-il de répondre?

**Exercice 2****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = i, \quad z_B = 2i, \quad \text{et} \quad z_C = 1.$$

On considère la transformation  $f$  qui à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , distinct de A, associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{2iz}{z-i}.$$

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par la transformation  $f$ .
2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points  $B'$  et  $C'$ , images respectives des points  $B$  et  $C$  par  $f$ .
3.
  - a. Montrer que, pour tout point  $M$  distinct de  $A$ , l'affixe  $z'$  de  $M'$  vérifie l'égalité  $z' - 2i = \frac{-2}{z - i}$ .
  - b. En déduire que si le point  $M$  appartient au cercle  $\Gamma$  de centre  $A$  et de rayon 1, alors son image  $M'$  appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
  - c. Exprimer une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$  en fonction d'une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ .
  - d. On considère le point  $D$  d'affixe  $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ . Vérifier que  $D$  appartient au cercle  $\Gamma$ .  
Construire, à la règle et au compas, le point  $D$  et son image  $D'$  par  $f$ .
4. On note  $G$  l'isobarycentre des points  $O$ ,  $B$  et  $C$ .
  - a. Déterminer l'affixe du point  $G$ .
  - b. On admet que l'image  $G'$  du point  $G$  a pour affixe  $z_{G'} = -3 - i$ . Le point  $G'$  est-il l'isobarycentre des points  $O$ ,  $B'$  et  $C'$ ?

**Exercice 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct  $ABCD$  tel que  $AB = L$  et  $AD = 1$  ( $L > 1$ ).  
Sur les segments  $[AB]$  et  $[CD]$ , on place respectivement les points  $F$  et  $E$  tels que  $AFED$  soit un carré.

On suppose qu'il existe une similitude directe  $f$  de rapport  $k$  telle que :

$$f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = E.$$

**Partie A**

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que  $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .
2.
  - a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude  $f$ .  
On appelle  $\Omega$  le centre de la similitude  $f$ .
  - b. Déterminer l'image par la composée  $f \circ f$  des points  $\Omega$ ,  $A$  et  $B$ .
  - c. Quelle est la nature de la transformation  $f \circ f$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
  - d. En déduire que  $\Omega$  est le point d'intersection des droites  $(AC)$  et  $(BE)$ .
3.
  - a. Déterminer l'image de la droite  $(CD)$  par la similitude  $f$ .
  - b. En déduire une construction du point  $E'$ , image du point  $E$  par la similitude  $f$ .

**Partie B**

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$ .

On appelle  $z$  l'affixe du point  $M$ , et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , image du point  $M$  par  $f$ .

1. Montrer que  $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .
2. Déterminer l'image du point  $D$  par  $f$ .

**Exercice 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note  $R_n$  l'évènement « le joueur réussit le  $n$ -ième service » et  $\overline{R_n}$  l'évènement contraire.

Soit  $x_n$  la probabilité de  $R_n$  et  $y_n$  celle de  $\overline{R_n}$ .

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

- si le joueur réussit le  $n$ -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8;
- si le joueur ne réussit pas le  $n$ -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

- a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . (On pourra utiliser un arbre de probabilité)
- b. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

- a. Donner les probabilités conditionnelles  $P_{R_n}(R_{n+1})$  et  $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ .
- b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$ .

3. Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel non nul par

$$u_n = 9x_n - 7.$$

*Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

- a. Déterminer la nature de la suite  $(u_n)$ .
- b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .

**Exercice 4****5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $2x - y + 3z - 1 = 0$  et soit S le point de coordonnées  $(1 ; 3 ; 5)$ .

*Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie. ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.*

1. Les points d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.
2. La droite  $\delta_1$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .

3. La droite  $\delta_2$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7 + 4t \\ z = 7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle à la droite  $\delta_1$  passant par le point S.

4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées

$$\left(-\frac{6}{7}; \frac{55}{14}; \frac{31}{14}\right).$$

5. Le plan  $\mathcal{P}$  coupe la sphère de centre S et de rayon 3.