Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud 16 novembre 2011

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** Voir à la fin.

   b. Il semble que la suite est décroissante et qu'elle converge vers 1.

2. **a.** *Initialisation :* $u_0 = 4 > 1$. L'inégalité est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $k \geqslant 0$ tel que $u_k > 1$.

   Alors $u_k + 1 > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{u_k+1} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{4}{u_k+1} < 2 \Rightarrow -\dfrac{4}{u_k+1} > -2 \Rightarrow 3 - \dfrac{4}{u_k+1} > 1$.

   Or $3 - \dfrac{4}{u_k+1} = u_{k+1}$.

   On a donc démontré que si $u_k > 1$, alors $u_{k+1} > 1$.

   Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel n, $u_n > 1$.

   b. La fonction f somme de fonctions dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et

   $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro.

   La fonction f est donc croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

   Montrons par récurrence la décroissance de la suite :

   Initialisation : $u_1 = 2,2 < u_0 = 4$. La relation est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $k \geqslant 0$ tel que $u_k < u_{k-1}$; la fonction f étant croissante (tous les termes étant supérieurs à 1), on a $f(u_k) < f(u_{k-1}) \iff u_{k+1} < u_k$.

   On a donc démontré que quel que soit le naturel n, $u_{n+1} < u_n$.

   c. On a démontré que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente vers un nombre ℓ supérieur ou égal à 1.

   La fonction f est continue car dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$; la relation de récurrence

   $u_{n+1} = f(u_n)$ donne à la limite $\ell = f(\ell) \iff \ell = 3 - \dfrac{4}{\ell+1} \iff \ell(\ell+1) = 3(\ell+1) - 4$

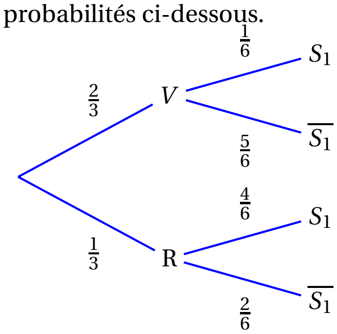
   $\iff \ell^2 + \ell - 3\ell - 3 + 4 = 0 \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell - 1 = 0 \iff \ell = 1$.

   La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. D'après la loi des probabilités totales on a :
$P\left(S_1\right) = P\left(V \cap S_1\right) + P\left(R \cap S_1\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{18} + \dfrac{4}{18} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.

2. a. Le tirage d'un dé vert a une probabilité de $\dfrac{2}{3}$ et celui du dé rouge de $\dfrac{1}{3}$.

Dans chaque cas le lancer n fois de suite est un schéma de Bernouilli de paramètres n et $\dfrac{1}{6}$ pour le dé vert et de n et $\dfrac{4}{6}$ pour le dé rouge. La probabilité de tirer n 6 est donc :

$$P\left(S_n\right) = \overbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}^{\text{dé vert}} + \overbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n}^{\text{dé rouge}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. D'après la question précédente la probabilité d'avoir tiré le dé vert puis obtenu n fois 6 est égale à $\dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ et la probabilité d'avoir tiré n fois de suite le 6 est égale à $P\left(S_n\right)$.

On a donc $p_n = p_{\text{tirer}\, n\, 6}(\text{tirer le dé rouge}) = \dfrac{\text{tirer } n\, 6 \text{ et tirer le dé rouge}}{\text{tirer } n\, 6} =$

$\dfrac{\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n} =$ en multipliant par 3×3^n, $\quad p_n = \dfrac{2^n}{2 \times \frac{1}{2^n} + 2^n} =$

$\dfrac{2^n}{2^{1-n} + 2^n} = \dfrac{1}{2^{1-2n} + 1} = \dfrac{1}{2 \times 2^{-2n} + 1} = \dfrac{1}{2 \times \frac{1}{2^{2n}} + 1} = \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

c. On a $p_n \geqslant 0,999 \iff \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geqslant 0,999 \iff 1 \geqslant 0,999\left[2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right] \iff$

$1 \geqslant 1,998\left(\frac{1}{4}\right)^n + 0,999 \iff 0,001 \dfrac{1,998}{4^n} \iff 1 \geqslant \dfrac{1998}{4^n} \iff 4^n > 1998 \iff n \ln 4 \geqslant \ln 1998 \iff$

$n \geqslant \dfrac{\ln 1998}{\ln 4} \approx 5,4$

Conclusion : $n_0 = 6$.

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Ob a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. On a $g(x) = x^2 - x^2 \ln x$.
On a $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

3. g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ car produit de sommes de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2x(1 - \ln x) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 2x - 2x \ln x - x = x - 2x \ln x = x(1 - 2\ln x)$ qui est du signe de $1 - 2\ln x$ puisque x est positif.

Or $1 - 2\ln x > 0 \iff 1 > 2\ln x \iff \dfrac{1}{2} > \ln x \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > x$ et de même $1 - 2\ln x < 0 \iff x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (ou $x > \sqrt{\mathrm{e}}$).

La fonction est donc croissante sur $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$ et décroissante sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}~;~+\infty\right[$, avec un maximum $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]^2\left(1 - \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{e} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathrm{e} \times \frac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

4. Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, g croît de 0 à $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$, puis de décroît de $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ à $-\infty$.
La fonction g étant continue car dérivable s'annule donc en point unique de $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$ tel que :
$g(x) = 0 \iff x^2(1-\ln x) = 0 \iff 1-\ln x$ (puisque $x \neq 0$) $\iff 1 = \ln x \iff x = \mathrm{e}$.
Conclusion : la fonction g est positive sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$ et négative sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Partie B Représentation graphique et aire sous la courbe

1. Voir l'annexe 2.
2. On a $g(1) = 1^2(1-\ln 1) = 1$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1) = 1(1-2\ln 1) = 1$.
Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est donc :
$M(x\,;\,y) \in (T) \iff y - g(1) = g'(1)(x-1) \iff y-1 = x-1 \iff y = x$.
3. On a vu que la fonction g est positive sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, donc sur $]1\,;\,\mathrm{e}[$.
L'aire, en unités d'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est donc égale à l'intégrale :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2(1-\ln x)\,\mathrm{d}x$.
En posant : $\begin{array}{ll} u' = x^2 & v = 1-\ln x \\ u = \dfrac{x^3}{3} & v' = -\dfrac{1}{x} \end{array}$
Toutes ces fonctions étant continues, on peut intégrer par parties :
$\mathscr{A} = \left[\dfrac{x^3}{3}(1-\ln x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x^3}{3} \times \left(-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}(1-\ln x)\right]_1^{\mathrm{e}} + \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x =$
$\left[\dfrac{x^3}{3}(1-\ln x) + \dfrac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3}(1-1) - \dfrac{1}{3} + \dfrac{\mathrm{e}^3}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{\mathrm{e}^3}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{\mathrm{e}^3-4}{9}$ (u. a.).

Exercice 4 — 3 points

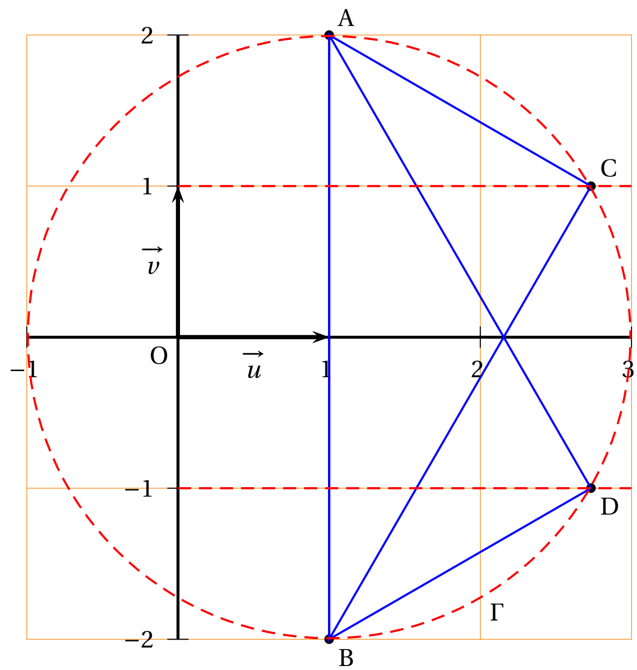
Commun à tous les candidats

1. $z^2 - 2z + 5 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 5 = 0 \iff (z-1)^2 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - (2\mathrm{i})^2 = 0 \iff$
$(z-1+2\mathrm{i})(z-1-2\mathrm{i}) = 0$
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $1+2\mathrm{i}$ et $1-2\mathrm{i}$.
2. **a.** Voir la figure ci-dessous.
b. $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} = \dfrac{1-2\mathrm{i}-1-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}-1-\sqrt{3}-\mathrm{i}} \dfrac{-3\mathrm{i}-\sqrt{3}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}} =$
$\dfrac{\left(-3\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)\left(\mathrm{i}+\sqrt{3}\right)}{\left(\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)\left(\mathrm{i}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{3-3\mathrm{i}\sqrt{3}-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\mathrm{i}^2-3} = \dfrac{-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{-4} = \mathrm{i}\sqrt{3}$.
c. $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} = \mathrm{i}\sqrt{3}$ (imaginaire pur) : cette égalité montre qu'un argument du quotient est égal à $\dfrac{\pi}{2}$, soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Conclusion le triangle ABC est rectangle en C. (non isocèle car CB = $\sqrt{3}$CA)

3. Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [AB] ; il est donc inscrit dans un cercle Γ de centre le milieu de [AB] soit le point d'affixe 1 et de rayon $\frac{1}{2}\text{AB} = 2$.

   Dans la symétrie autour de l'axe $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}\right)$ les points A et B sont symétriques de même que les points C et D puisque leurs affixes sont conjuguées.
   Le symétrique du triangle ABC est donc le triangle BAD. La symétrie étant une isométrie, le triangle BAD est lui aussi rectangle en D donc inscrit dans le même cercle Γ centré au milieu de [AB] et de rayon 2.

4. C est le point partie réelle positive, intersection du cercle précédent Γ et de la droite d'équation $y = 1$.idem pour D avec la droite d'équation $y = -1$.



Exercice 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Proposition 1 :
Faux : on devrait avoir $t = 1$, mais alors $x = 1$.
Proposition 2 :
$2x - 3y + z = 0$ ». La droite $\mathcal{D}$ a un vecteur directeur de cordonnées $(2\,;\,-3\,;\,1)$ qui est un vecteur normal au plan : une équation de ce plan est $2x - 3y + z = a$ et comme O appartient à ce plan on a $a = 0$. Vrai.
Proposition 3 : On a vu qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-3\,;\,1)$; de même un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\overrightarrow{v}\,(3\,;\,1\,;\,3)$.
Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6 - 3 + 3 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc les droites ne sont pas orthogonales.
Proposition 4 : Les droites sont coplanaires si elles sont parallèles, ce qui est faux puisque leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, ou si elles ont un point en commun.
On devrait donc avoir $z = t = 3t' - 2$ soit en remplaçant dans $x = 2t - 1 = 2(3t' - 2) - 1 = 6t' - 5$.
Or $6t' - 5 = 3t' \iff 3t' = 5 \iff t' = \frac{5}{3}$ et $t = 3t' - 2 = 5 - 2 = 3$.

Or avec l'équation de $\mathcal{D}$, on aurait $y = -9+2 = -7$ et avec celle de $\mathcal{D}'$, on aurait $y = \dfrac{5}{3}+2 = \dfrac{11}{3}$. Il n'y a donc pas de point commun.
Conclusion : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires. Faux.
Proposition 5 : On a $d = \dfrac{|-2+3+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}} = \dfrac{2\sqrt{14}}{14} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$. Vrai.

Exercice 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

- **Proposition 1 :**
  On a $2011 = 7\times 287+2$, donc $2011 \equiv 2 \quad [7]$.
  On en déduit que $2011^3 \equiv 2^3 \quad [7]$ ou encore $2011^3 \equiv 8 \quad [7]$ ou plus simplement $2011^3 \equiv 1 \quad [7]$.
  Or $2011 = 3\times 670+1$, donc $2011^{2011} = 2011^{3\times 670+1} = 2011\times 2011^{3\times 670} = 2011\times\left(2011^3\right)^{670}$.
  On a vu que $2011^3 \equiv 1 \quad [7]$, donc $\left(2011^3\right)^{670} \equiv 1^{670}$ soit $\left(2011^3\right)^{670} \equiv 1$
  Finalement comme $2011 \equiv 2 \quad [7]$ et $\left(2011^3\right)^{670} \equiv 1$ par produit on obtient $2011^{2011} \equiv 2\times 1 \quad [7]$ soit $2011^{2011} \equiv 2 \quad [7]$. Vrai.

- **Proposition 2 :** Faux : Si a et b sont premiers entre eux, il existe deux entiers u' et v' tels que $au'+bv' = 1 \Rightarrow 3(au')+3(bv') = 3 \iff a(3u')+b(3v') = 3$.
  Avec $u = 3u'$ et $v = 3v'$, on a bien $au+bv = 3$ et PGCD$(a\,;\,b) = 1$.

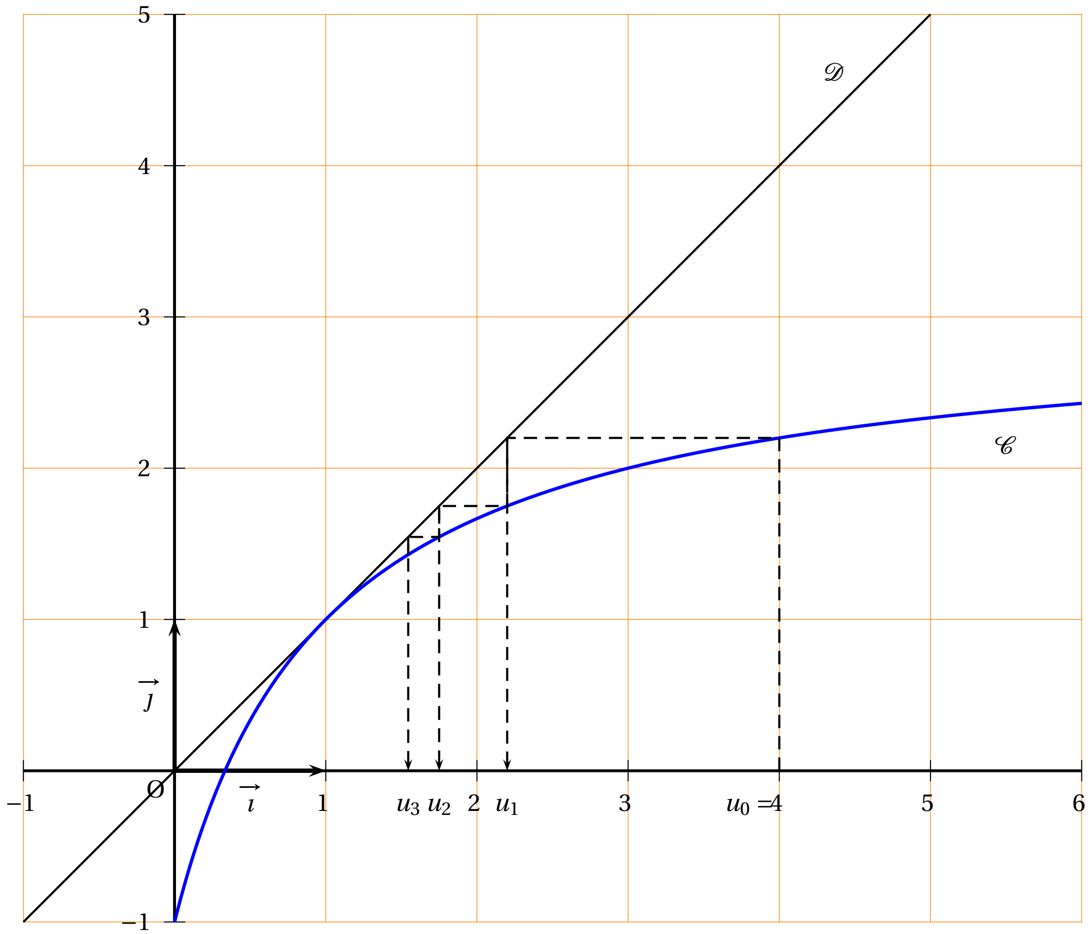
- **Proposition 3 :** $n^2-3n-10 = \left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-10 = \left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4} = 0 \iff \left(n-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right) = (n+2)(n-5)$.
  Pour $n = 5$ le nombre est nul donc non premier.
  Pour $n = 6$ le nombre est 8 qui n'est pas premier
  Pour $n > 6$, le nombre a deux diviseurs au moins distincts de 1 et de lui-même : $n+2$ et $n-5$: il n'est donc pas premier. Vrai

- **Proposition 4 :** $\text{A}(-2\,;\,-1\,;\,\gamma) \in \Gamma \iff 4+1 = 5\gamma^2 \iff 5 = 5\gamma^2 \iff 1 = \gamma^2 \iff \gamma = 1 \quad \text{ou} \quad \gamma = -1$. Faux.

- **Proposition 5 :** Tout point de l'intersection a ses coordonnées qui vérifient le système :
  $\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2 &=& 5z^2\\ x &=& a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2+y^2 &=& 5z^2\\ x &=& a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y^2-5z^2 &=& -a^2\\ x &=& a\end{array}\right.$. Cette équation est celle d'une hyperbole, mais si $a = 0$, cette équation se réduit à $y^2-5z^2 = 0 \iff \left(y+z\sqrt{5}\right)\left(y-z\sqrt{5}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& z\sqrt{5} \quad \text{ou}\\ y &=& -z\sqrt{5}\end{array}\right.$
  L'intersection est donc composée de deux droites. Vrai.

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)



ANNEXE 2

À rendre avec la copie