Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2009

EXERCICE 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Voir le cours.

Partie B

1. On a $\overrightarrow{AB}(3~;~0~;~-3)$, $\overrightarrow{AC}(3~;~3~;~3)$, $\overrightarrow{BC}(0~;~3~;~6)$.
   D'où $AB^2 = 9+9 = 18$, $AC^2 = 9+9+9 = 27$, $BC^2 = 9+36 = 45$.
   Or $18+27 = 45 \iff AB^2+AC^2 = BC^2 \iff$ ABC est un triangle rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
   On a donc $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{18}\times\sqrt{27}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ (cm^2).
2. $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 3+0-3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$;
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 3-6+3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.
   Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires (puisqu'orthogonaux) du plan ABC est un vecteur normal à ce plan. Une équation de ce plan est donc : $M(x~;~y~;~z) \in \text{ABC} \iff 1x-2y+1z+d = 0$.
   Par exemple $A(3~;~-2~;~2) \in \text{ABC} \iff 3+4+2+d = 0 \iff d = -9$.
   Finalement :
   $$M(x~;~y~;~z) \in \text{ABC} \iff x-2y+z-9 = 0.$$
3. $d(\text{D}, ABC) = \dfrac{|4-0-1-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$. On sait que la distance de D au plan ABC est obtenue en traçant la perpendiculaire à ce plan contenant D : la distance calculée à la question précédente est donc la longueur de la hauteur du tétraèdre DABC. Son volume est donc égal à :
   $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{A}(ABC)\times\sqrt{6} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6} = 9$ cm^3.

Partie C

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant lui aussi un vecteur normal au plan Q, les deux plans sont parallèles et distincts car $-9 \neq -5$.
2. Équation de (DA) : on traduit l'appartenance géométrique $M(x~;~y~;~z) \in$ (AD) par la relation de colinéarité : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AD}$ qui se traduit en égalant les coordonnées des deux vecteurs par le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcr} x-3 &=& \alpha\\ y+2 &=& 2\alpha\\ z-2 &=& -3\alpha\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 3+\alpha\\ y &=& -2+2\alpha\\ z &=& 2-3\alpha\end{array}\right.$$
   E est commun à Q et à (AD) : ses coordonnées vérifient donc l'équation de Q et les équations paramétriques de (AD) soit le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 3+\alpha\\ y &=& -2+2\alpha\\ z &=& 2-3\alpha\\ x-2y+z-5 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} x &=& 3+\alpha\\ y &=& -2+2\alpha\\ z &=& 2-3\alpha\\ 3+\alpha-2(-2+2\alpha)+2-3\alpha-5 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 3+\alpha\\ y &=& -2+2\alpha\\ z &=& 2-3\alpha\\ 4 &=& 6\alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 3+\dfrac{2}{3}\\ y &=& -2+2\times\dfrac{2}{3}\\ z &=& 2-3\times\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3} &=& \alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& \dfrac{11}{3}\\ y &=& -\dfrac{2}{3}\\ z &=& 0\\ \dfrac{2}{3} &=& \alpha \end{array}\right.$$

Conclusion ; $\mathrm{E}\left(\dfrac{11}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\ ;\ 0\right)$. On a aussi $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Cette dernière égalité montre que E appartient à la droite (AD) et que l'abscisse de E est $\dfrac{2}{3}$ si on prend le repère (A, D) ; donc E appartient au segment [AD] (il est aux 2/3 en partant de A ou au 1/3 en partant de D.)

3. D'après la question précédente et les deux plans Q et (ABC) étant parallèles la section de la pyramide DABC est la pyramide DEFG dont les dimensions sont celles de DABC multipliées par $\dfrac{1}{3}$.

D'où $V(\text{DEFG}) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 V(\text{DABC}) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 9 = \dfrac{1}{3}\ \text{cm}^3$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $z_{\mathrm{P}'} = \dfrac{\overline{1+\mathrm{i}}(1+\mathrm{i}-2)}{\overline{1+\mathrm{i}}-2} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{-1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{-2-2\mathrm{i}}{2} = -1-\mathrm{i}$.
Donc $z_{\mathrm{P}'} = -z_{\mathrm{P}}$.

b. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}(-1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{B}}(-1\ ;\ 1)$. Les vecteurs sont égaux donc les droites (AP) et (P′B) sont parallèles.
On peut même dire que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{B}} \iff$ (APBP′) est un parallélogramme.

c. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}(-1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}(-2\ ;\ -2)$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = (-1)\times(-2)+1\times(-2) = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}(-1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ sont orthogonaux ou encore les droites (AP) et (PP′) sont perpendiculaires.

2. Pour $M(z)$ avec $z \neq 2$, donc avec $\overline{z} \neq 2$, $M'(z') = M(z) \iff$
$z' = \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} = z \iff \overline{z}(z-2) = z\left(\overline{z}-2\right) \iff z\overline{z}-2\overline{z} = z\overline{z}-2z \iff -2\overline{z} = -2z \iff \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des points invariants par f est l'axe des abscisses privé du point A.

3. a. $(z-2)\left(\overline{z}-2\right) = (z-2)\left(\overline{z}-\overline{2}\right) = (z-2)\overline{(z-2)} = |z-2|^2 \in \mathbb{R}_+$ (carré du module de $z-2$, soit $\mathrm{A}M^2$.)

b. $\dfrac{z'+2}{z-2} = \dfrac{\dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}+2}{z-2} = \dfrac{\dfrac{\overline{z}(z-2)+2\left(\overline{z}-2\right)}{\overline{z}-2}}{z-2} = \dfrac{z\overline{z}-2\overline{z}+2\overline{z}-4}{(z-2)\left(\overline{z}-2\right)} = \dfrac{z\overline{z}-4}{(z-2)\left(\overline{z}-2\right)}$.
Or $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ et dans la question précédente on a vu que
$(z-2)\left(\overline{z}-2\right) = |z-2|^2 \in \mathbb{R}$.
Le dernier quotient est donc réel.

c. $\boxed{\textbf{Question} : \text{Peut-on avoir } M' = B\,?}$

Pour le savoir il suffit de résoudre l'équation $z' = -2$, avec $z \neq 2$:

$$z' = -2 \iff \overline{z}(z-2) = -2(\overline{z}-2) \iff |z|^2 = 4 \underset{|z|\geqslant 0}{\iff} |z| = 2.$$

Donc la réponse est **oui** puisque tout point M du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 distinct de A a pour image B.

Par conséquent la question posée est mal formulée. On aurait pu demander par exemple :

c) *Montrer que : ou bien $M' = \mathrm{B}$, ou bien les droites* $(\mathrm{A}M)$ *et* $(\mathrm{B}M')$ *sont parallèles.*

Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Il s'agit de montrer que les droites $(\mathrm{A}M)$ et (MM') sont perpendiculaires. (Ici on est sûr que $M \neq M'$ car $M \notin (\mathrm{AB})$.)

Remarquons que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ dont [AB] est un diamètre alors on sait que l'angle $\widehat{\mathrm{A}M\mathrm{B}}$ est un angle droit, et comme dans ce cas $M' = \mathrm{B}$, alors les droites $(\mathrm{A}M)$ et (MM') sont perpendiculaires.

Plus généralement : On a $z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}} = x - 2 + \mathrm{i}y$ et $z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z = \ \ldots$

Remarque : Autre façon : $\dfrac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}} = \dfrac{z' - z}{z - 2} = \dfrac{2(z - \overline{z})}{(\overline{z} - 2)(z - 2)} = \dfrac{2}{|z-2|^2}(z - \overline{z})$.

Et comme $\dfrac{2}{|z-2|^2}$ est un réel > 0 on en déduit :

$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg(z - \overline{z}) \ [2\pi]$.

Enfin, puisque $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$, on a $\arg\left(z - \overline{z}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc

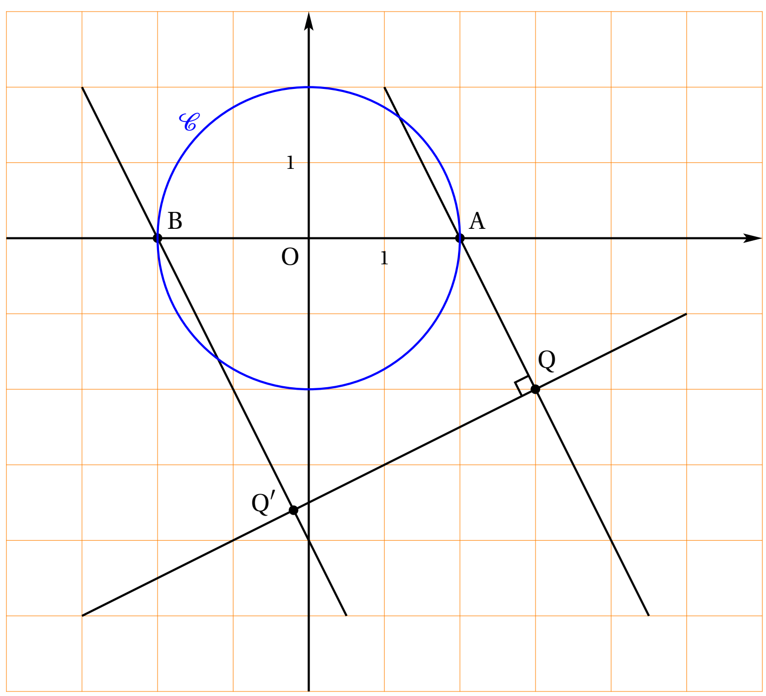
$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}, \overrightarrow{MM'}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui prouve que les droites $(\mathrm{A}M)$ et (MM') sont perpendiculaires.

5. Soit M un point distinct de A.

— Si $M \in (\mathrm{AB})$ alors $M' = M$.

— Si $M \in \mathscr{C}$ alors $M' = \mathrm{B}$.

— Sinon, i.e. si $M \notin \mathscr{C} \cup (\mathrm{AB})$: On trace la perpendiculaire en M à la droite $(\mathrm{A}M)$: elle coupe la parallèle à la droite $(\mathrm{A}M)$ passant par B en M'.



Le dernier résultat peut s'écrire $\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = 0 + k\pi$ (argument d'un réel).

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}M'}$ sont colinéaires donc les droites $(\mathrm{A}M)$ et $(\mathrm{B}M')$ sont parallèles.

4. On a $z_{\overrightarrow{AM}} = x-2+\mathrm{i}y$ et $z_{\overrightarrow{MM'}} = z'-z = \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} - z = \dfrac{\overline{z}(z-2)-z\left(\overline{z}-2\right)}{\overline{z}-2} = \dfrac{z\overline{z}-2\overline{z}-z\overline{z}+2z}{\overline{z}-2} = \dfrac{2\left(z-\overline{z}\right)}{\overline{z}-2} = \dfrac{2(x+\mathrm{i}y-x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y-2} = \dfrac{4\mathrm{i}y}{(x-2)-\mathrm{i}y} = \dfrac{4\mathrm{i}y[(x-2)+\mathrm{i}y]}{(x-2)^2+y^2} = \dfrac{-4y^2}{(x-2)^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{4y(x-2)}{(x-2)^2+y^2}$.

Calculons $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MM'} = \dfrac{-4y^2(x-2)}{(x-2)^2+y^2} + \dfrac{4y^2(x-2)}{(x-2)^2+y^2} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $z_{\overrightarrow{MM'}}$ sont orthogonaux, donc les droites (AM) et (MM') sont perpendiculaires.

5. La construction de l'image de M se déduit des questions précédentes :
- Tracer la parallèle (d_1) à (AM) contenant B ;
- Tracer la perpendiculaire (d_2) à la droite (AM) contenant M
- L'intersection de (d_1) et (d_2) est le point M'.

EXERCICE 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Par définition le rapport de la similitude est égal à $\dfrac{\text{IK}}{\text{AB}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$ si a est la mesure des côtés du carré.

De même l'angle de la similitude est égal à $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{IK}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$.

2. Comme $\widehat{\text{AJI}} = \dfrac{\pi}{2}$, J appartient à Γ_1. De même comme $\widehat{\text{KJB}} = \dfrac{\pi}{2}$, J appartient à Γ_2.

D'autre part d'après la question précédente, si Ω est le centre de la similitude, on a $\left(\overrightarrow{\Omega A},\ \overrightarrow{\Omega I}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ qui montre que Ω appartient au cercle Γ_1 ; de même $\left(\overrightarrow{\Omega B},\ \overrightarrow{\Omega K}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ montre que Ω appartient au cercle Γ_2.

Les deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en J et en Ω

3. **a.** Par propriété de la similitude, l'image de la droite (AC) est une droite perpendiculaire contenant l'image de A, donc I : c'est la droite (BD).

De même l'image de (BC) est perpendiculaire à celle-ci et contient l'image de B qui est K : c'est la droite (CD).

Comme C est commun à (AC) et (BC), son image est commun aux droites images (BD) et (CD) : c'est donc D.

b. L'image du milieu I de [AC] est le milieu E du segment image soit [ID] (propriété de la similitude).

4. On peut simplement montrer que par définition de la similitude s : $\left(\overrightarrow{\Omega A},\ \overrightarrow{\Omega I}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $\left(\overrightarrow{\Omega I},\ \overrightarrow{\Omega E}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$, donc $\left(\overrightarrow{\Omega A},\ \overrightarrow{\Omega E}\right) = \pi \mod 2\pi$ qui signifie que A, Ω et E sont alignés.

Partie B

1. On a $z_{\text{A}} = 0$, $z_{\text{B}} = 10$, $z_{\text{C}} = 10+10\mathrm{i}$, $z_{\text{D}} = 10\mathrm{i}$.

2. On a facilement $z_{\text{I}} = 5+5\mathrm{i}$.

On sait qu'une similitude a une écriture complexe de la forme $z' = az+b$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$. En utilisant I $= s(\text{A})$, on obtient :

$5+5\mathrm{i} = a \times 0 + b \iff b = 5+5\mathrm{i}$.

On a $z_K = 5+10\text{i}$ et $K = s(B)$ se traduit par :

$5+10\text{i} = a(10)+5+5\text{i} \iff 5\text{i} = 10a \iff a = \dfrac{1}{2}\text{i}.$

L'écriture complexe de s est donc : $z' = \dfrac{1}{2}\text{i}z+5+5\text{i}$.

3. Le point Ω est le point invariant de la similitude donc son affixe est la solution de l'équation $z' = z \iff \dfrac{1}{2}\text{i}z+5+5\text{i} = z \iff z\left(1-\dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 5+5\text{i} \iff z = \dfrac{5+5\text{i}}{1-\frac{1}{2}\text{i}} = \dfrac{(5+5\text{i})\left(1+\frac{1}{2}\text{i}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\text{i}\right)\left(1-\frac{1}{2}\text{i}\right)} = \dfrac{5-\frac{5}{2}+\text{i}\left(\frac{5}{2}+5\right)}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{5}{2}+\frac{15}{2}\text{i}}{\frac{5}{4}} = 2+6\text{i}.$

Donc $\omega = 2+6\text{i}$.

4. On a $z_I = 5+5\text{i}$. D est l'image de I par s, donc grâce à l'écriture complexe :
$z_D = \dfrac{1}{2}\text{i}(5+5\text{i})+5+5\text{i} = \dfrac{5}{2}\text{i}-\dfrac{5}{2}+5+5\text{i} = \dfrac{5}{2}+\dfrac{15}{2}\text{i}$. (on peut directement obtenir ce résultat en utilisant le fait que E est le milieu de [ID].)

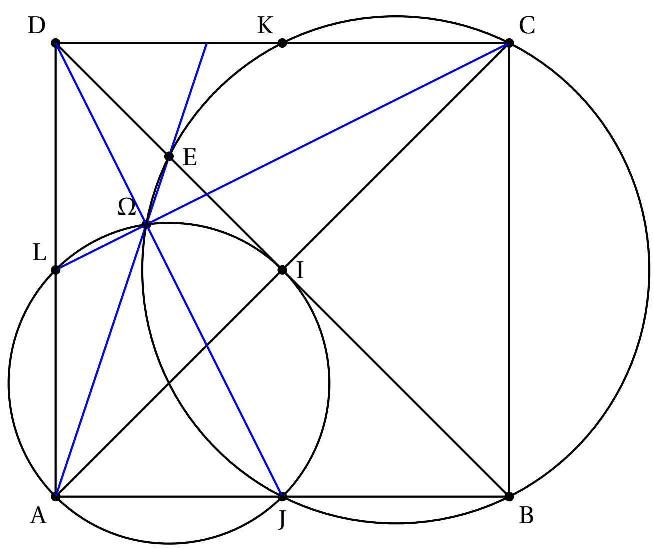
Pour les deux points Ω et E la partie complexe est le triple de la partie réelle. Ils sont donc alignés avec l'origine du repère A.

5. On sait déjà que Ω appartient à (AE) ;

On a $z_L = 5\text{i}$, donc $z_{\overrightarrow{\Omega L}} = -2-\text{i}$ et $z_{\overrightarrow{\Omega C}} = 8+4\text{i} = -4z_{\overrightarrow{\Omega L}} \iff \overrightarrow{\Omega C} = -4\overrightarrow{\Omega L} \iff$ L, Ω et C sont alignés.

De même $z_J = 5$, donc $z_{\overrightarrow{\Omega J}} = 3-6\text{i}$ et $z_{\overrightarrow{\Omega D}} = -2+4\text{i}$. On a donc $\overrightarrow{\Omega J} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\Omega D} \iff$ J, Ω et D sont alignés.

Les droites (AE), (CL) et (DJ) sont donc concourantes en Ω.



EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. a. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $2-x \neq 0$, donc f quotient de fonctions dérivables est dérivable et :
$f'(x) = \dfrac{-\text{e}^{-x}(2-x)+\text{e}^{-x}}{(2-x)^2} = \dfrac{\text{e}^{-x}(1-2+x)}{(2-x)^2} = \dfrac{\text{e}^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$. Tous les termes sont positifs sur $[0\,;\,1]$ sauf $x-1$ qui est négatif sur $[0;\,1]$, donc $f'(x) \leqslant 0$: la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,1]$ de $f(0) = \dfrac{1}{2}$ à $f(1) = \text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}} \approx 0{,}368$.

b. On a vu à la question précédente que sur $[0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{\text{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. a. Posons $\left\{\begin{array}{l c l} u(x) & = & 2+x\\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l c l} u'(x) & = & 1\\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$

Toutes les fonctions étant continues, on peut intégrer par parties :

$J = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \left[-(x+3)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 =$
$-4\mathrm{e}^{-1} + 3 = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

b. En partant de l'encadrement trouvé au 1. b. :

$\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{x^2}{\mathrm{e}} \leqslant x^2 f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2$ d'où en intégrant sur $[0\,;\,1]$,

$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x \leqslant K \leqslant \int_0^1 \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x \iff \left[\dfrac{x^3}{3\mathrm{e}}\right]_{0^1} \leqslant K \leqslant \left[\dfrac{x^3}{6}\right]_{0^1} \iff \dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

c. $J+K = \displaystyle\int_{0^1} (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(2+x)\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right]\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(2-x)(2+x)\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = 4I$.

d. $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} \Rightarrow \dfrac{1}{3\mathrm{e}} + 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} \leqslant J+K \leqslant \dfrac{1}{6} + 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} \Rightarrow \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3\mathrm{e}} + 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) \leqslant I \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{6} + 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) \iff \dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \leqslant$
$I \leqslant \dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Comme $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} > 0,412$ et $\dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 0,424$, on en déduit que
$0,412 < I < 0,424$, il en résulte que $I \approx 0,42$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. a. Trois réponses possibles pour chacune des cinq questions : il y a donc $3^5 = 243$ mots possibles.

b. L'élève répète 5 fois l'expérience de Bernouilli : obtenir la bonne réponse avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$; ces expériences sont indépendantes, donc la variable aléatoire Z donnant le nombre de réponses exactes suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

Donc $p(Z=1) = \dbinom{5}{1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{5-1} = 5 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{80}{243} = p(E)$.

De même, la probabilité qu'il n'ait aucune réponse juste est :

$p(Z=0) = 50\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{5-0} = \dfrac{2^5}{3^5} = \dfrac{32}{243} = p(F)$.

Un palindrome est de la forme $\overline{abcba}$: les trois premiers peuvent être quelconques, mais le quatrième choix doit être le même que le second et le dernier le même que le premier : la probabilité est donc égale à $1 \times 1 \times 1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} = p(G)$.

2. a. D'après la question 1. un élève a la probabilité égale à $\dfrac{32}{243}$ de n'avoir aucune réponse exacte. Les élèves répondant de façon indépendante les uns des autres, la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 28$ et de probabilité $p = \dfrac{32}{243}$.

b. La probabilité cherchée est égale à :

$p(X \leqslant 1) = p(X=0) + p(X=1) = \dbinom{28}{0}\left(\dfrac{32}{243}\right)^0\left(1-\dfrac{32}{243}\right)^{28-0} +$
$\dbinom{28}{1}\left(\dfrac{32}{243}\right)^1\left(1-\dfrac{32}{243}\right)^{28-1} = \left(\dfrac{211}{243}\right)^{28} + 28 \times \dfrac{32}{243} \times \left(\dfrac{211}{243}\right)^{27} \approx 0,1006 \approx 0,10$ au centième près.