

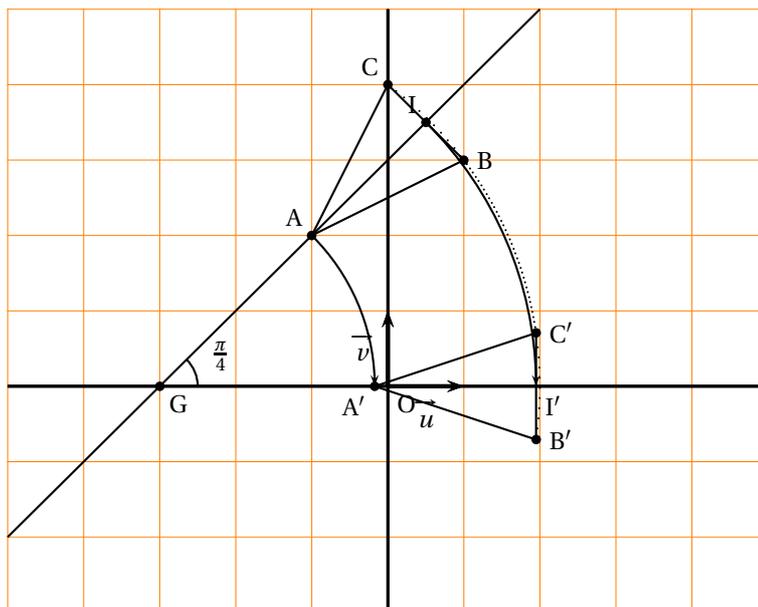
Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud ∞  
novembre 2008

EXERCICE I

5 points

1.  $AB^2 = |b - a|^2 = |2 + i|^2 = 4 + 1 = 5$ ;  
 $AC^2 = |c - a|^2 = |1 + 2i|^2 = 1 + 4 = 5$ .  
 $AB^2 = AC^2 \iff AB = AC \iff ABC$  est isocèle en A.
2.  $Z_I = \frac{1}{2} + i\frac{7}{2}$ .
  - a.  $\frac{z - z_I}{z - a}$  est un réel si et seulement si  $\arg\left(\frac{z - z_I}{z - a}\right) = 0 \iff$   
 $(\vec{AM}, \vec{IM}) = 0 \pmod{2\pi}$ , ce qui signifie que les points A, I et M sont alignés.  
Les points M appartiennent donc à la droite (IA) privée du point A.
  - b. D'après la question précédente le réel solution est l'abscisse du point commun à la droite (AI) et à l'axe des abscisses. L'équation de la droite (AI) est  $y = x + 3$ , donc  $y = 0$  entraîne  $x = -3$ .
  - c.  $\vec{z_{AI}} = z_I - a = \frac{1}{2} + i\frac{7}{2} + 1 - 2i = \frac{3}{2} + i\frac{3}{2}$ .  
On a  $AI^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{18}{4}$ . Donc  $AI = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .  
On peut donc écrire :  
 $\vec{z_{AI}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .
3. a. Le point G a pour abscisse le réel solution de la question précédente. C'est donc un point de la droite (AI) contenant le sommet principal A et le milieu du côté opposé du triangle isocèle. Cette droite (AI) est donc hauteur, médiane, médiatrice et axe de symétrie du triangle ABC.  
On a vu que l'équation de (AI) est  $y = x + 3$ ; le coefficient directeur de cette droite est égal à 1, ce qui correspond à un angle  $(\vec{u}, \vec{AI})$  de  $\frac{\pi}{4}$ .  
Il existe donc deux rotations de centre G qui transforment A et I en deux points de l'axe des réels :
  - La rotation  $r_1$  d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ ;
  - La rotation  $r_2$  d'angle  $\frac{3\pi}{4}$ . $r_1$  est bien la première rotation de la question précédente.  
Son écriture complexe est :  $z' - z_G = e^{i(-\frac{\pi}{4})} (z - z_G)$  soit  
 $z' - (-3) = e^{i(-\frac{\pi}{4})} (z - (-3))$ .  
 $z' = -3 + e^{i(-\frac{\pi}{4})} (z + 3)$
- b. Une rotation conserve les longueurs et les angles; donc l'image de (AI) axe de symétrie de (ABC) est l'axe de symétrie de  $A'B'C'$  soit  $A'I'$ .  
Donc  $B'$  et  $C'$  sont symétriques autour de l'axe des abscisses et donc sans calcul,  $b' = c'$ .



**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1.  $F(1; 0; 1), G(1; 2; 1), H(0; 2; 1)$

2. a. Le volume  $V$  est égal à :  $\frac{\mathcal{A}(FGH) \times AE}{3}$ .

$FGH$  est un triangle rectangle en  $G$ , donc  $\mathcal{A}(FGH) = \frac{FG \times GH}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$   
 et comme  $AE = 1, V = \frac{1 \times 1}{3} = \frac{1}{3}$ .

b. On a  $I(0; 1; 0), \vec{FI} = (-1; 1; -1), \vec{IH} = (0; 1; 1), \vec{FI} \cdot \vec{IH} = 0 + 1 - 1 = 0$ . Les vecteurs sont orthogonaux donc  $(FI)$  et  $(IH)$  sont perpendiculaires en  $I$ .  
 En prenant comme base le triangle  $FIH, V = \frac{FIH \times d}{3}, d$  étant la distance du point  $G$  au plan  $(FIH)$ . Le triangle  $FIH$  étant rectangle en  $I$ , son aire est égale à  $\frac{FI \times IH}{2}$ .

$FI^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow FI = \sqrt{3};$

$IH^2 = 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow IH = \sqrt{2}.$

$\mathcal{A}_{FIH} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

En reprenant l'écriture de  $V: \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times d \Leftrightarrow d \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

3. a. On calcule :

$\vec{n} \cdot \vec{FI} = -2 + 1 + 1 = 0.$

$\vec{n} \cdot \vec{IH} = 0 + 1 - 1 = 0.$

$\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $(FIH)$  est orthogonal à ce plan.

b. L'équation du plan  $(FIH)$  est donc de la forme :  $2x + 1y - 1z + d' = 0$ .

Comme  $F \in (FIH)$  ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus soit :

$0 + 1 - 0 + d' = 0 \Leftrightarrow d' = -1.$

Une équation du plan  $(FIH)$  est donc :

$M(x; y; z) \in (FIH) \Leftrightarrow 2x + y - z - 1 = 0$

- c. On sait que la distance  $d$  de G au plan (FIH) est :  $\frac{|2x_G + y_G - z_G - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . On retrouve la même valeur qu'au 2. b.
4. a. (AG) est perpendiculaire au plan (FIH) si et seulement si  $\overrightarrow{AG}$  est colinéaire à  $\vec{n}$ . Or  $\overrightarrow{AG}(1; 2; 1)$  qui n'est manifestement pas colinéaire à  $\vec{n}$ .
- b.  $M(x; y; z) \in (AG) \iff \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AG}$  qui se traduit par :
- $$M(x; y; z) \in (AG) \iff \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$
- c. Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2t + 2t - t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$$

Les coordonnées de K sont donc  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ .

5. Le rayon de la sphère est GK.

$$\text{Or } GK^2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{24}{9} \Rightarrow GK = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Or la distance  $d$  de G au plan (FIH) est égale à  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ; elle est donc inférieure au rayon de la sphère et par conséquent la section de la sphère par le plan (FIH) est un cercle.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1.

- a. On sait que l'équation paramétrique de la droite  $D'$  est celle d'une droite contenant le point  $(0; 0; -2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}'(1; -1; 0)$ .  
 Or  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 - 1 + 0 = 0$  : les vecteurs directeurs des deux droites sont orthogonaux; les droites  $D$  et  $D'$  sont perpendiculaires.  
 Le point A est commun aux deux droites  $D$  et  $D'$ . S'il existe un plan contenant A et défini par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ , un vecteur  $\vec{n}(a; b; c)$  normal à ce plan est orthogonal à chaque vecteur  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ ; donc  
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \iff a + b = 0$  et  
 $\vec{n} \cdot \vec{u}' = 0 \iff a - b = 0$ .  
 On en déduit aussitôt que  $a = b = 0$  et  $\vec{n}(0; 0; c)$ . Donc une équation de ce plan est  $z = k$  soit  $z = 2$  puisque A appartient à ce plan horizontal.  
 Ceci est impossible puisque tous les points de  $D'$  ont pour cote  $-2$ .  
 Conclusion : les droites  $D$  et  $D'$  ne sont pas coplanaires.

b.  $M(x; y; z) \in D' \iff \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 1t \\ z = 2 + 0t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ .

On a :  $\begin{cases} (MH) \perp D \\ H \in D \end{cases}$ .

Avec  $H(x_H; y_H; z_H)$  ce système se traduit par :

$$\begin{cases} x_H - x + y_H - y = 0 \\ x_H = t \\ y_H = t \\ z_H = 2 \end{cases} \Rightarrow t - x + t - y = 0 \Leftrightarrow t = \frac{x+y}{2}.$$

Donc  $\overrightarrow{MH} (x_H - x; y_H - y; z_H - z)$  ou encore

$$\overrightarrow{MH} \left( \frac{y-x}{2}; \frac{x-y}{2}; 2-z \right).$$

On en déduit :

$$MH^2 = \left( \frac{y-x}{2} \right)^2 + \left( \frac{x-y}{2} \right)^2 + (2-z)^2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} + (2-z)^2.$$

c.  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  appartient à  $S$  si et seulement si  $MH = MK \Leftrightarrow MH^2 = MK^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} + (2-z)^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 8 + 2z^2 - 8z + x^2 + y^2 - 2xy + 8 + 2z^2 + 8z \Leftrightarrow 16z = -4xy \Leftrightarrow z = -\frac{xy}{4}.$

2. a. Le plan a pour équation  $z = 0$ ; les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La section se compose de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

b. Un plan parallèle à  $(xOy)$  a une équation de la forme  $z = k, k \in \mathbb{R}$ ; les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} z = k \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = k \\ xy = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4k}{x} \\ z = k \end{cases} \text{ si } x \neq 0.$$

La section est donc une hyperbole

c. Les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

La section est donc ici une parabole.

EXERCICE 3

3 points

1.

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. La fonction est une différence de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , elle est donc dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x} \text{ qui est du signe du numérateur puisque } x > 0.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4;$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4; f \text{ est décroissante sur cet intervalle}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4; f \text{ est croissante sur cet intervalle.}$$

Il en résulte que  $f$  a un minimum pour  $x = 4$  et  $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - 2\ln 2 \approx 0,62$ .

b. Le minimum de  $f$  étant supérieur à zéro,  $f(x) > 0$  quel que soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

$$\text{Donc } f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \ln x \Leftrightarrow \sqrt{x} > \ln x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} > \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}, \text{ car } x > 0.$$

c. Comme  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , on obtient par application du théorème des « gendarmes » que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

On peut écrire  $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{\ln x^{n \times \frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{\ln \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}{x^{\frac{1}{n}}} = n \frac{\ln \left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{x^{\frac{1}{n}}}.$

En posant  $X = x^{\frac{1}{n}}$ ,  $f_n(x) = n \frac{\ln X}{X}.$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$  et par composition,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$   
 (d'après la question précédente)  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$

**EXERCICE 4**

**7 points**

1. On sait que cette équation a pour solutions les fonctions :  $x \mapsto Ke^{-\frac{x}{2}}$ ,  $K \in \mathbb{R}.$

2.

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

a.  $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$  :  $f$  est un produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) + (2mx + p)e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } E' \text{ si et seulement si } 2f' + f &= e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \iff \\ -e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) + 2(2mx + p)e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) &= e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \iff \\ -mx^2 - px + 4mx + 2p + mx^2 + px &= x + 1 \iff 4mx + 2p = x + 1 \iff \\ (4m - 1)x + (2p - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Cette fonction affine est nulle si et seulement si  $4m - 1 = 0$  et  $2p - 1 = 0$ , soit si  $m = \frac{1}{4}$  et  $p = \frac{1}{2}.$

b. On a :  $g$  et  $f$  solutions de  $E'$  si et seulement si

$$\begin{cases} 2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2f' + f = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \end{cases} \Rightarrow \text{(par différence)} \begin{cases} 2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2(g' - f') + g - f = 0 \end{cases}$$

Donc  $g$  est solution de l'équation  $(E')$  si et seulement si  $g - f$  est solution de l'équation  $(E)$

On a donc  $g(x) - f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}(x^2 + 2x)$  d'où  $g(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}(x^2 + 2x + K')$ ,  $K' \in \mathbb{R}.$

3.  $h$  produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$h'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4} \left(-\frac{x^2}{2} - x + 2x + 2\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4} \left(-\frac{x^2}{2} + x + 2\right)$$

qui est du signe du trinôme  $-\frac{x^2}{2} + x + 2.$

Pour ce trinôme  $\Delta = 1 + 4 = 5$ ; il a donc deux racines  $x_1 = 1 - \sqrt{5}$  et  $x_2 = 1 + \sqrt{5}.$  Il est négatif (du signe de  $-\frac{x^2}{2}$ ) sauf entre les racines.

$h'(x)$  est donc négative sauf sur l'intervalle  $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}].$

$h$  est donc décroissante sauf sur  $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$  où elle est croissante.

4. • On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ , quel que soit le naturel  $x$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} x^2 = 0$   
 et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \times 2x = 0$ .

Conclusion :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

5. a. Étudions la fonction  $d$  définie par

$$d(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 2x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{4} \right)$$

qui est du signe du trinôme  $-x^2 - 2x + 4$ .

Pour ce trinôme  $\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$ . Il a donc pour racines

$x_1 = -1 - \sqrt{5}$  et  $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ . Il est négatif sauf entre les deux racines.

Donc la fonction  $d$  est négative sauf sur l'intervalle  $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$ .

Conclusion : la courbe  $\Gamma$  est sous la courbe  $\mathcal{C}$  sauf entre  $-1 - \sqrt{5}$  et  $-1 + \sqrt{5}$ .

Les deux courbes ayant deux points communs pour  $x = -1 - \sqrt{5}$  et  $x = -1 + \sqrt{5}$ .

- b.

