

♣ Baccalauréat S Amérique du Nord 31 mai 2012 ♣

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
 - a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
 - b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
 - c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 2

5 points

Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Soit g la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1 ; +\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 b. En déduire le sens de variation de f sur $[1 ; +\infty[$.
 c. Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} .
 d. Étudier la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite \mathcal{D} .
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de \mathcal{C} et \mathcal{D} .
- a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $M_k N_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $M_k N_k = \frac{\ln(k)}{k}$.
 b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_k N_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2} .

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0 ; 1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0 ; 1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f .

Partie A

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; 1]$.
2. Soit g la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.
- a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.
 b. Montrer que, pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que
- $$f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Montrer que, pour tout x de $[0 ; 1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$.
2.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $I_n \geq 0$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$.
 - c. En déduire la limite de la suite (I_n) .

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
 - a. Exprimer a sous forme exponentielle.
 - b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f .
3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω .
 - a. À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.
 - b. Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$.
 - c. En déduire l'ensemble Γ_3 .
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
 - a. Exprimer $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ en fonction d'un argument de z .
 - b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

EXERCICE 5

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit S la transformation du plan qui, à tout M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = 5iz + 6i + 4.$$

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S .
2. On note x et x' , y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z' .

Démontrer que :

$$\begin{cases} x' &= -5y + 4 \\ y' &= 5x + 6 \end{cases}$$

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 5$.

On note \mathcal{E} l'ensemble de ces points M .

On rappelle que les coordonnées $(x'; y')$ du point M' , image du point M par la transformation S , sont $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(a; b)$ tels que $4a + 3b = 5$.
 - b. En déduire l'ensemble des points M de \mathcal{E} de coordonnées $(x; y)$ tels que $-3x' + 4y' = 37$.
2. Soit M un point de l'ensemble \mathcal{E} et M' son image par la transformation S .
 - a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.
 - b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.
En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.
 - c. Déterminer l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.