∽ Corrigé du baccalauréat S ∽
Amérique du Nord 27 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par r_A a une affixe z' définie par : $z' - \text{i} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z - \text{i})$ ou encore : $z' - \text{i} = i(z - \text{i}) \iff z' = \text{i} + \text{i}z + 1 \iff z' = \text{i}z + 1 + \text{i}$.
   D étant l'image de C r_A, on a donc : $d = \text{i}(3\text{i}) + 1 + \text{i} = -3 + 1 + \text{i} = -2 + \text{i}$.
2. De même, pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par r_B a une affixe z' définie par : $z' - (1 + \text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z - 1 - \text{i}) \iff z' = 1 + \text{i} + \text{i}(z - 1 - \text{i}) \iff z' = 1 + \text{i} + \text{i}z - \text{i} + 1 \iff z' = \text{i}z + 2$. Donc $g = \text{i}(-2 + \text{i}) + 2 = -2\text{i} - 1 + 2 = 1 - 2\text{i}$.
   Enfin pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par r_O a une affixe z' définie par :
   $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}z = -\text{i}z$. Donc $h = -\text{i}(3\text{i}) = 3$.
3. On a $d - c = -2 + \text{i} - 3\text{i} = -2 - 2\text{i}$ et $g - h = 1 - 2\text{i} - 3 = -2 - 2\text{i}$.
   Or $d - c = g - h \iff \overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{\text{HG}} \iff$ CDGH est un parallélogramme.
   De plus $g - c = 1 - 2\text{i} - 3\text{i} = 1 - 5\text{i}$, donc $\text{CG}^2 = 1 + 25 = 26$ et
   $h - d = 3 - (-2 + \text{i}) = 5 + \text{i}$, donc $\text{DH}^2 = 25 + 1 = 26$.
   On a donc $\text{CG}^2 = \text{DH}^2 \iff \text{CG} = \text{DH}$.
   Conclusion : le parallélogramme CDGH a ses diagonales de même longueur : c'est un rectangle.

Partie B

1. En reprenant les définitions des rotations trouvées dans la partie A, on a : $n = \text{i}m + 1 + \text{i}$.
   De même : $p = \text{i}n + 2 = \text{i}(\text{i}m + 1 + \text{i}) + 2 = -m + \text{i} - 1 + 2 = -m + 1 + \text{i}$.
   Enfin $q = -\text{i}m$.
2. D'une part : $n - m = \text{i}m + 1 + \text{i} - m = m(\text{i} - 1) + 1 + \text{i}$, d'autre part :
   $p - q = -m + 1 + \text{i} - (-\text{i}m) = m(\text{i} - 1) + 1 + \text{i}$.
   Donc $n - m = p - q \iff MNPQ$ est un parallélogramme
3. **a.** $\dfrac{m-n}{p-n} = \dfrac{m - (\text{i}m + 1 + \text{i})}{-m + 1 + \text{i} - (\text{i}m + 1 + \text{i})} = \dfrac{m(1 - \text{i}) - 1 - \text{i}}{m(-\text{i} - 1)} = \dfrac{[m(1 - \text{i}) - 1 - \text{i}](-1 + \text{i})}{m(-\text{i} - 1)(\text{i} - 1)} = \dfrac{2m\text{i} + 2}{2m} = \dfrac{m\text{i} + 1}{m} = \text{i} + \dfrac{1}{m}$ (car $M \neq \text{O} \Rightarrow m \neq 0$).

   b. $MNPQ$ est un rectangle si et seulement si $\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{mod } \pi) \iff \dfrac{m-n}{p-n}$ est un imaginaire pur.
   Donc comme $\text{i} + \dfrac{1}{m}$ ne peut être un imaginaire que si $\dfrac{1}{m}$ est un imaginaire, c'est-à-dire si m est un imaginaire, $MNPQ$ est un rectangle si et seulement si $m = \alpha\text{i}$, avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, puisque M ne peut être ni O ni en A.

EXERCICE 2 **4 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Puisque tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis la probabilité est égale à :

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{25!}{2! \times 23!}} = \frac{3}{25 \times 12} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Partie B

1. On a $p(X>5)=1-p(X\leqslant 5)$. Donc :

$p(X>5)=0,4 \iff 1-p(X\leqslant 5)=0,4 \iff 0,6=p(X\leqslant 5) \iff 0,6=\displaystyle\int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \iff 0,6=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^5 \iff 0,6=-\mathrm{e}^{-5\lambda}+1 \iff \mathrm{e}^{-5\lambda}=0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $-5\lambda=\ln 0,4 \iff \lambda=\dfrac{\ln 0,4}{-5}$.

Or $\dfrac{\ln 0,4}{-5}\approx 0,183$ à10^{-3} près.

2. Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X>5)=\dfrac{p(X>5)}{p(X>3)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-5\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}=\mathrm{e}^{-2\lambda}=\mathrm{e}^{-0,36}\approx 0,698$.

3. **a.** On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. On a donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,4. La probabilité cherché est donc le complément à 1 de la probabilité de n'avoir aucun ordinateur en état de marche soit :
$1-(0,6)^{10}\approx 0,994$ à10^{-3} près.

b. Avec n ordinateurs on a à résoudre l'inéquation :
$1-0,6^n\geqslant 0,999 \iff 0,001\geqslant 0,6^n \iff \ln 0,001\geqslant n\ln 0,6 \iff$
$n\geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}\approx 13,5$.
Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Comme $a+b+c\neq 0$ le barycentre G de A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c et vérifie :
$a\overrightarrow{\mathrm{GA}}+b\overrightarrow{\mathrm{GB}}+c\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{0}$. On a donc grâce à la relation de Chasles :
$\|a\overrightarrow{M\mathrm{A}}+b\overrightarrow{M\mathrm{B}}+c\overrightarrow{M\mathrm{C}}\|=k \iff \|a\overrightarrow{M\mathrm{G}}+a\overrightarrow{\mathrm{GA}}+b\overrightarrow{M\mathrm{G}}+b\overrightarrow{\mathrm{GB}}+c\overrightarrow{M\mathrm{G}}+c\overrightarrow{\mathrm{GC}}\|=k \iff$

$$\left\|\underbrace{a\overrightarrow{\mathrm{GA}}+b\overrightarrow{\mathrm{GB}}+c\overrightarrow{\mathrm{GC}}}_{=\overrightarrow{0}}+(a+b+c)\overrightarrow{M\mathrm{G}}\right\|=k \iff |a+b+c|\left\|\overrightarrow{M\mathrm{G}}\right\|=k \iff \mathrm{G}M=\frac{k}{|a+b+c|}.$$

Cette dernière égalité montre que tous les points M sont à la distance $\dfrac{k}{|a+b+c|}$ du point G, donc appartiennent à la sphère de centre G et de rayon $\dfrac{k}{|a+b+c|}$.

Partie B

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(0\,;\,1\,;\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}(-1\,;\,0\,;\,1)$ d'où $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0+0+0=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=0+0+0=0$.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ ne sont pas colinéaires, on déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BCE).

2. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{BCE}) \iff \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}M}=0 \iff 1(x-1)+0(y-1)+1(z-0)=0 \iff x+z-1=0$.

3. La droite (Δ) étant perpendiculaire au plan (BCE) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et contient E.
Une des équations paramétriques est donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta) \iff \text{il existe } t\in\mathbb{R} \text{ tel que} \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0+t\\ y &=& 0+0t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

4. Le plan (ABC) a pour équation $z=0$. Un point est commun à(Δ) et à(ABC) si ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\\ z &=& 0\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 0\\ -1 &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1\\ y &=& 0\\ -1 &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right.$$

Il y a donc un seul point commun le point R de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

Or le milieu de [BR] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1-1}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\right) = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$: c'est le point A. Donc R est le symétrique de B par rapport à A.

5. **a.** Soit G le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs $1, -1$ et 2 : ce barycentre existe puisque $1-1+2 \neq 0$ et vérifie donc par définition :

$-\overrightarrow{G\text{R}} - 1\overrightarrow{G\text{B}} + 2\overrightarrow{G\text{C}} = \overrightarrow{0}$.

Les coordonnées de G sont donc :

$x_G = \dfrac{1x_\text{R} - x_\text{B} + 2x_\text{C}}{2} = 0$; $y_G = \dfrac{1y_\text{R} - y_\text{B} + 2y_\text{C}}{2} = 1$; $z_G = \dfrac{1z_\text{R} - z_\text{B} + 2z_\text{C}}{2} = 0$.

Ces coordonnées sont en fait celles du point D.

b. Comme D est le barycentre de R, B et C affectés des coefficients respectifs $1, -1$ et 2, on a donc par définition :

$1\overrightarrow{\text{DR}} - 1\overrightarrow{\text{DB}} + 2\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{0}$.

En utilisant la relation de Chasles :

$\|\overrightarrow{M\text{R}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\| = 2\sqrt{2} \iff \|\overrightarrow{M\text{D}} + \overrightarrow{\text{DR}} - \overrightarrow{M\text{D}} - \overrightarrow{\text{DB}} + 2\overrightarrow{M\text{D}} + 2\overrightarrow{\text{DC}}\| = 2\sqrt{2} \iff$

$\|\underbrace{\overrightarrow{\text{DR}} - \overrightarrow{\text{DB}} + 2\overrightarrow{\text{DC}}}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{M\text{D}} - \overrightarrow{M\text{D}} + 2\overrightarrow{M\text{D}}\| = 2\sqrt{2} \iff \|2\overrightarrow{M\text{D}}\| = 2\sqrt{2} \iff \text{D}M = \sqrt{2}$: les points M appartiennent donc à, la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.

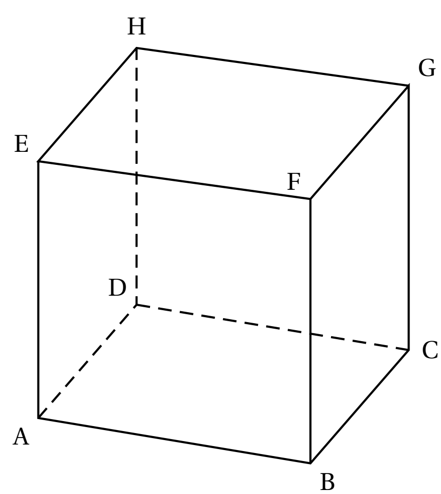
Rem. : on aurait utiliser directement le résultat de la R. O. C.

c. On a $\text{DB}^2 = 1+1 = 2$, $\text{DE}^2 = 1+1 = 2$ et $\text{DG}^2 = 1+1 = 2$, d'où $\text{DB} = \text{DE} = \text{DG} = \sqrt{2}$, ce qui démontre que B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

d. Calculons la distance du centre de la sphère au plan (BCE) :

$d(\text{D, (BCE)}) = \dfrac{|0+0-1}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$. Cette distance étant inférieure au rayon de la sphère, ceci démontre que (S) et (BCE) sont sécants selon un cercle, dont le centre est le projeté orthogonal de D sur le plan (BCE) et son rayon r vérifie l'égalité de Pythagore

$r^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \iff r^2 + \dfrac{1}{2} = 2 \iff r^2 = \dfrac{3}{2} \iff r = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soient a, b et c trois entiers non nuls ; supposons que a divise le produit bc et que a et b soient premiers entre eux.

Il existe donc un entier k tel que $bc = ka$. D'autre part puisque a et b soient premiers entre eux, il existe d'après le théorème de Bezout deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ ou en multipliant par c non nul :
$acu + bcv = c$ et en remplaçant bc par ka :
$acu + kav = c \iff a(cu + kv) = c$.
Cette égalité montre que a divise c.

Partie B

1. On calcule : $u_1 = 2+3+6-1 = 10$;
$u_2 = 4+9+36-1 = 48$;
$u_3 = 8+27+216-1 = 250$;
$u_4 = 16+81+1\,296-1 = 1\,392$;
$u_5 = 32+243+7\,776-1 = 8\,050$;
$u_6 = 64+729+46\,656-1 = 47\,448$.
2. On a : $2 \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow 2^n \equiv 0 \mod 2$;
$3 \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow 3^n \equiv 1 \mod 2$;
$6 \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow 6^n \equiv 0 \mod 2$.
Donc $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0+1+0-1 \equiv 0 \mod 2$; u_n est donc pair.
Ou encore 2^n et 6^n sont pairs ; 3^n et 1 sont impairs, donc leur différence est paire et par somme u_n est pair.
3. n est pair : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$.
On peut donc écrire : $u_n = u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 2^{2k} \times 3^{2k} - 1 = 4^k + 4^k \times 9^k + 9^k - 1$.
Comme $4 \equiv 0 \mod 4$, $4^k \equiv 0 \mod 4$; $4^k \times 9^k \equiv 0 \mod 4$;
$9 \equiv 1 \mod 4$, donc $9^k \equiv 1 \mod 4$, d'où par somme : $u_{2k} \equiv 0+0+1-1 = 0 \mod 4$, c'est-à-dire que u_{2k} est un multiple de 4.
4. On a vu que 2 divise u_1, que 3 divise u_2, que 5 divise u_3 et 7 divise u_5.
Donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à l'ensemble (E)
5. **a.** D'après le théorème de Fermat, 2 étant premier avec p, on a $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
Donc $6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1} \iff 3 \mod p$.
D'autre part 3 étant premier avec p, $3^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
Donc $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 \mod p$.
   b. Par définition : $6u_{p-2} = 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$.
On a vu que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \mod p$, que $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \mod p$ et on a $6^{p-1} \equiv 1 \mod p$ car p premier avec 2 et 3 est premier avec 6.
Donc $6 \times u_{p-2} \equiv 3+2+1-6 \mod p$ soit $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \mod p$.
   c. On vient de démontrer que $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \mod p$: donc p divise $6 \times u_{p-2}$, mais p et 6 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss p divise u_{p-2}.
Conclusion : tout entier p premier appartient à l'ensemble (E)

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

1. g somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
$g'(0) = 0$ et pour tout réel $x \in [0~;~+\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle ($x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 > 1$).
Conclusion : $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$, la dérivée ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
La fonction étant strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $g(x) \geqslant 0$.

3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
$g(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x \geqslant 1$.

Partie B

1. On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$.
Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$
$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. **a.** $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} =$
$\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

b. La position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0\,;\,1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (D).

3. **a.** En posant : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$, u est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, donc $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln|u(x)|$, mais comme on a vu que
$u(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0, |u(x)| = u(x)$.
Conclusion : une primitive sur $[0\,;\,1]$ de f est la fonction F définie par $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$.

b. On a vu que sur $[0\,;\,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (D), donc l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :
$$\int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x \left[F(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = F(1) - \frac{1}{2} - F(0) = \ln\left(\mathrm{e}^1 - 1\right) - \frac{1}{2} - \left[\ln\left(\mathrm{e}^0 - 0\right)\right] = \ln(\mathrm{e} - 1) - \frac{1}{2}. \text{ (u. a.)}$$

Partie C

1. Voir plus bas.

2. *Initialisation* : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on a vu (question 2. b.) que sur $[0\,;\,1]$ $f(x) - x \geqslant 0$, soit avec $x = u_0$,
$f(u_0) - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 \geqslant u_0$.
On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. La relation est vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \iff u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$
et comme $u_1 > u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang$n$, elle l'est aussi au rang $n+1$.
On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n,
$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.
Elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant 1$.
Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient par continuité $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$ le nombre 1.
Conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

ANNEXE

EXERCICE 4