Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ unité graphique : 4 cm.
On considère le point A d'affixe $z_A = 2+i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. **a.** Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O ; \vec{u}\right)$.

   b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
   Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).
3. Soit M le point d'affixe $\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$.

   a. Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

   b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).
4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
   La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b. Déterminer l'affixe du point N.
5. On désigne par M$'$ l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Déterminer l'affixe du point M$'$.

   b. Montrer que le point M$'$ appartient au cercle (Γ').

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$A(3 ; 0 ; 0),\ B(0 ; 6 ; 0),\ C(0 ; 0 ; 4) \text{ et } D(-5 ; 0 ; 1).$$

1. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan $(x\text{O}y)$.

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3~;~1~;~-3)$ et $(-1~;~1~;~1)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan $(x\text{O}y)$.

4. **a.** On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a~;~b) = 440$, c'est-à-dire tel que $(a~;~b)$ soit solution du système

$$(1) : \left\{\begin{array}{l} a < b \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \\ \text{ppcm}(a~;~b) = 440 \end{array}\right.$$

Montrer que si $(a~;~b)$ est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a~;~b)$ est égal à 1 ou 5.

Conclure

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x]$.
   Interpréter graphiquement cette limite.

   b. Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.

   a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
   Démontrer que la tangente $\mathscr{T}_a$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

   $$g(x) = f(x) - xf'(x).$$

   b. Montrer que sur $]1~;~+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

   c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

   d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
   La courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.
4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\,;\,10]$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

   b. Étudier les variations de la suite (x_n).

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

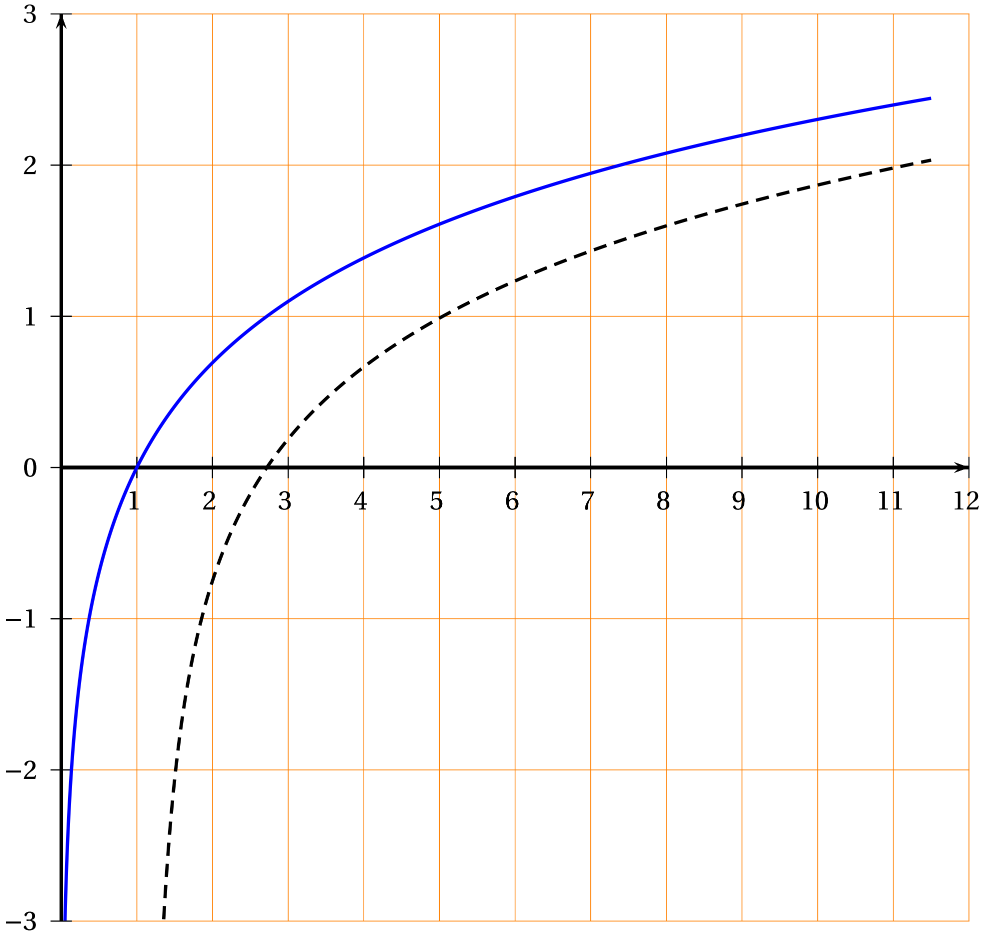
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n$.

Annexe

Cette page est à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3
Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



Courbe Γ représentative de la fonction ln

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f