∽ Corrigé du baccalauréat S ∾
Amérique du Nord 3 juin 2010

EXERCICE 1 **4 points**

1. a.

$$A(1\,;\,-2\,;\,4)\quad B(-2\,;\,-6\,;\,5)\quad C(-4\,;\,0\,;\,-3).$$

$\overrightarrow{AB}(-3\,;\,-4\,;\,1)$; $\overrightarrow{AC}(-5\,;\,2\,;\,-7)$ or comme aucun de ces vecteurs n'est nul, s'ils étaient colinéaires, on pourrait trouver un seul k réel tel que

$\left\{\begin{array}{rcl} -3 &=& -5k\\ -4 &=& 2k\\ 1 &=& -7k\end{array}\right.$, or ce système est impossible (trois valeurs de k différentes).

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. le vecteur $\overrightarrow{n}(1\,;\,-1\,;\,-1)$ est orthogonal à $\vec{AB}$ car le produit scalaire est $-3+4-1=0$ le vecteur $\overrightarrow{n}(1\,;\,-1\,;\,-1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ car le produit scalaire est égal à $-5-2+7=0$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}(1\,;\,-1\,;\,-1)$ un vecteur normal au plan (ABC).

c. Une équation du plan (ABC)est de la forme $1\times x+(-1)\times y+(-1)\times z+d=0$, donc $x-y-z+d=0$ or C doit être dans ce plan donc $-4+3+d=0$ donc $d=1$, donc (ABC) : $x-y-z+1=0$.

2. a. Si $M(x,\ y,\ z)$ est sur (D) alors $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, donc $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{n}$

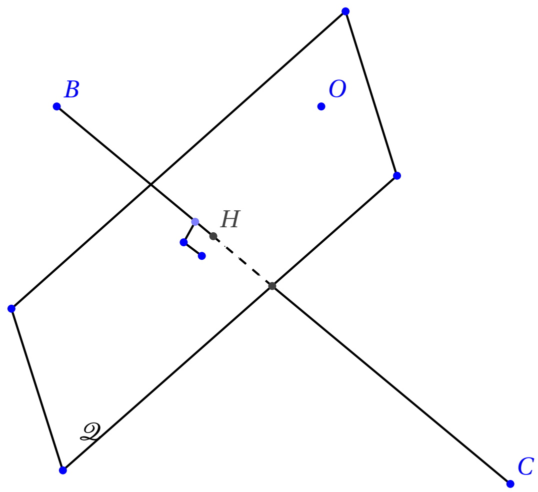
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\times 1\\ y &=& t\times(-1)\\ z &=& t\times(-1)\end{array}\right.$. C'est une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Le point O′ projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC)est à la fois sur (D) et sur (ABC) donc ses coordonnées vérifient $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -t\\ z &=& -t\\ x-y-z &=& -1\end{array}\right.$; ce système est noté (S) :

(S) $\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -t\\ z &=& -t\\ 3t &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -t\\ z &=& -t\\ t &=& \frac{-1}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{-1}{3}\\ y &=& \frac{1}{3}\\ z &=& \frac{1}{3}\\ t &=& \frac{-1}{3}\end{array}\right.$; $O'\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur La droite (BC).Donc H est l'intersection de (BC) avec le plan $(\mathcal{Q})$ perpendiculaire à (BC), on a donc $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et $H\in$ (BC), donc $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=t\|\overrightarrow{BC}\|^2$.

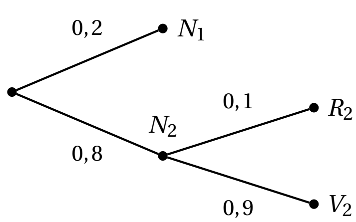
Finalement : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$ (car B ≠ C).



a. $\overrightarrow{\text{OB}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{HB}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}$.
Soit t le réel tel que $\overrightarrow{\text{BH}} = t\overrightarrow{\text{BC}}$.
$\overrightarrow{\text{OB}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0 - t \times (\overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}})$.
donc $\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = t \times \text{BC}^2$.
$t = \frac{\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}}{\text{BC}^2}$

b. On calcule ensuite avec les coordonnées $\overrightarrow{\text{BO}}.\overrightarrow{\text{BC}}$ et BC^2
$\overrightarrow{\text{BO}}(2\,;\,6\,;\,-5)$ et $\overrightarrow{\text{BC}}(-2\,;\,6\,;\,-8)$; $\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = -4+36+40 = 72$; $BC^2 = 4+36+64 = 104$; $t = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}$.
$\overrightarrow{\text{OH}} = \overrightarrow{\text{OB}} + t\overrightarrow{\text{BC}}\ \overrightarrow{\text{OH}}$.
Donc $\overrightarrow{\text{OH}}$ a pour coordonnées :
$\left(-2+\frac{9}{13}\times(-2)\,;\,-6+\frac{9}{13}\times(6)\,;\,5+\frac{9}{13}\times(-8)\right) = \left(\frac{-44}{13};\frac{-24}{13};\frac{-7}{13}\right)$.
Ce sont aussi les coordonnées de H.

EXERCICE 2 **3 points**



Sur cet arbre N_1 c'est « tirer le numéro 1 », N_2 c'est « tirer le numéro 2 », « R_2 c'est « tirer une rouge numérotée 2 », « V_2 c'est « tirer une verte numérotée 2 »

1. La boule peut être rouge et porter le numéro 1, ou être rouge et porter le numéro 2 donc si on note R « la boule tirée est rouge, $R = N_1 \cup (N_2 \cap R_2)$, ceci est une réunion d'évènements disjoints car inclus dans N_1 et N_2, donc $p(R) = p(N_1) + p(N_2 \cap R_2) = p(N_1) + p(N_2) \times p_{N_2}(R_2) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28$
2. Ici on veut $p_R(N_2)$ c'est $p_R(N_2) = \frac{p(N_2 \cap R)}{p(R)} = \frac{p(N_2 \cap R_2)}{p(R)} = \frac{0,8 \times 0,1}{028} = \frac{2}{7}$
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne). On répète donc n fois l'expérience à deux issues : « tirer une rouge numérotée 1 » de probabilité $p = 0,2$ car c'est N_1 ou « ne pas tirer une rouge numérotée 1 » de probabilité $0,8$, la variable aléatoire X qui sert à compter les succès (nombre de boules rouges sur les n tirages) est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ 0,2)$.

   Donc, pour k entier entre 0 et n, $p(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k}$

   a. « Tirer au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages » a pour contraire « ne tirer aucune boule rouge portant le numéro 1 » de probabilité $p(X = 0)$ donc la probabilité demandée est

   $1 - p(X = 0) = 1 - 0,8^n$.

   b. Ceci revient à résoudre (n entier naturel) $1 - 0,8^n \geqslant 0,99$ ce qui est équivalent à $0,8^n \leqslant 0,01$, on prend les ln des deux membres qui sont strictement positifs

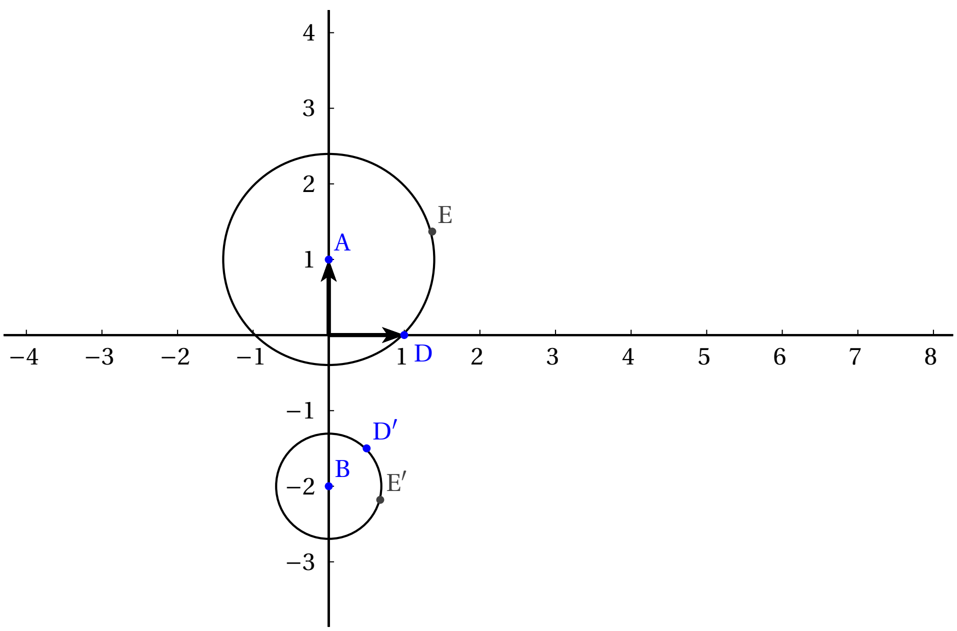
   $0,8^n \leqslant 0,01 \iff 0,8^n \leqslant 10^{-2} \iff n \ln(0,8) \leqslant -2\ln(10) \iff n \geqslant \frac{-2\ln(10)}{\ln(0,8)}$

   $\iff n \geqslant 20,6$.

   Il faut donc faire au moins 21 tirages.

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement obligatoire



1. Le point E est obtenu par rotation autour de A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ du point D donc

$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A)$ donc $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(1 - i) + i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (1 - i) + i = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2. $z_{D'} = \dfrac{2-i}{i+1} = \dfrac{(2-i)(1-i)}{1^2+1^2} = \dfrac{1-3i}{2} = 0,5-1,5i$.

3. a. Pour tout nombre complexe z différent de i,

$\left(z'+2i\right)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1}+2i\right)(z-i) = \left(\frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z-i) = \dfrac{i}{iz+1}\times(z-i) = \dfrac{i}{i(z-i)}\times(z-i) = 1.$

b. Donc pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z'+2i\right)(z-i) = 1$ en prenant les modules et les arg :

Comme $(z'+2i) = z_{\overrightarrow{BM'}}$; $(z-i) = z_{\overrightarrow{AM}}$, et comme $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{BM'}\right) = \arg\left(z'+2i\right)$

Ainsi que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AM}\right) = \arg(z-i)$.

Pour tout point M d'affixe $z (z \neq i)$:

$$\begin{aligned}&BM' \times AM = 1\\ &\text{et } \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{BM'}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AM}\right) = k\times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}\end{aligned}$$

4. a. Les points D et E appartiennent à un même cercle (C) de centre A et de rayon par la rotation du 1) et le rayon est AD $=\sqrt{2}$.

b. Donc AE $=\sqrt{2}$,AD $=\sqrt{2}$ donc en utilisant la relation sur les longueurs :

AD × BD$'$ = 1, AE × BE$'$ = 1 donc BE$'$ = BD$'$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et avec les angles :

$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{BE'}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AE}\right) = k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

et$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{BD'}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AD}\right) = k'\times 2\pi$ où k' est un entier relatif., on retranche ces deux relations

$\left(\overrightarrow{BD'},\ \overrightarrow{BE'}\right) + \left(\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right) = k''\times 2\pi$ où k'' est un entier relatif.

$\left(\overrightarrow{BD'},\ \overrightarrow{BE'}\right) + \frac{\pi}{3} = k''\times 2\pi$ où k'' est un entier relatif.

Donc $\left(\overrightarrow{BD'},\ \overrightarrow{BE'}\right) = -\frac{\pi}{3} + k''\times 2\pi$ où k''est un entier relatif.

c. Ainsi le triangle BD$'E'$ est isocèle en B et avec un angle de $-\frac{\pi}{3}$, il est équilatéral indirect.

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement de spécialité

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation

$$(E) : \quad 16x-3y = 4.$$

1. Le couple (1, 4) est une solution particulière de (E) : $16\times1-3\times4 = 16-12 = 4$.

2.

$$(E) : \quad 16x-3y = 16-4\times3.$$

Donc $16(x-1) = 3(y-4)$.

3 divise les deux membres et 3 premier avec 16 donc 3 divise $(x-1)$ (GAUSS) : il existe j entier tel que $(x-1) = 3j$ on a alors $16(3j) = 3(y-4)$ donc $16j = (y-4)$ donc $y = 16j+4$, on vérifie $16\times(3j+1)-3\times(16j+4) = 4$, donc

$\mathscr{S} = \{(3j+1\ ;\ 16j+4) | j \in \mathbb{Z}\}$

Partie B

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}z.$$

1. La transformation f est une similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{8}$.

2. a. La transformation g est une similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}^4 = 4$, d'angle $\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + 2\pi$.

b. Pour tout entier naturel n,
$M_{n+4} = f(M_{n+3}) = f \circ f(M_{n+2}) = f \circ f \circ f(M_{n+1}) = f \circ f \circ f \circ f(M_n) = g(M_n)$,
donc $M_{n+4} = g(M_n)$
$\text{O}M_{n+4} = 4\text{O}M_n$ et $\left(\overrightarrow{\text{O}M_n}, \overrightarrow{\text{O}M_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

c. $\text{M}_4 = g(M_0)$, $\text{M}_5 = g(M_1)$ et $\text{M}_6 = g(M_2)$
donc $OM_4 = 4OM_0$ et $\left(\overrightarrow{\text{O}M_0}, \overrightarrow{\text{O}M_4}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$
$OM_5 = 4OM_1$ et $\left(\overrightarrow{\text{O}M_1}, \overrightarrow{\text{O}M_5}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$
$OM_6 = 4OM_2$ et $\left(\overrightarrow{\text{O}M_2}, \overrightarrow{\text{O}M_6}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, $z_n = (\sqrt{2})^n \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$
C'est une récurrence :
pour $n = 0$; $z_0 = \left(\sqrt{2}\right)^0 \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\times 0\pi}{8}\right)} = \text{i}$: vrai.
Pour tout k un entier tel que $z_k = \left(\sqrt{2}\right)^k \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\times k\pi}{8}\right)}$ alors $z_{k+1} = \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{8}} z_k = \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{8}} \times (\sqrt{2})^k \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\times k\pi}{8}\right)}$
On regroupe les racines de 2 en additionnant les exposants, les exposants des exponentielles s'additionnent aussi et $\frac{3\times k\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\times(k+1)\pi}{8}$ donc $z_{k+1} = (\sqrt{2})^{k+1} \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\times(k+1)\pi}{8}\right)}$ ce qui prouve que si la proposition est vraie au rang k elle est vraie au rang $k+1$ donc , en fait :
Pour tout entier naturel n, $z_n = (\sqrt{2})^n \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. a. $\left(\overrightarrow{\text{O}M_p}, \overrightarrow{\text{O}M_n}\right) = \arg\left(\frac{z_n}{z_p}\right) = \arg\left((\sqrt{2})^{n-p} \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\times(n-p)\pi}{8}\right)}\right) = (n-p) \times \frac{3}{8} \times \pi$.

b. Les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si l'argument ci-dessus est un multiple de π si et seulement si $(n-p) \times \frac{3}{8}$si et seulement si 8 divise $3(n-p)$, or 8 et 3 sont premiers entre eux donc 8 divise $3(n-p)$ si et seulement si 8 divise $(n-p)$ (GAUSS) si et seulement si $(n-p)$ est un multiple de 8.

5. L'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[\text{O}x)$est l'ensemble des entiers naturels n tels $n \times \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = 2k\pi$, $k$entier, donc $3n + 4 = 16k$ donc $16k - 3n = 4$ et on a vu qu'alors $n = 16j + 4$ et $k = 3j + 1$, j entier.
On veut $n \in \mathbb{N}$, donc les entiers n cherchés vont de 16 en 16 à partir de 4 : ce sont 4 ; 20 ; 36 ; 52 ; $\cdots$ suite arithmétique de raison 16.

EXERCICE 4 — 8 points

Partie A :

1. $\dfrac{4 \times \text{e}^x}{\text{e}^x \times (1 + 7\text{e}^{-x})} = \dfrac{4}{1 + 7\text{e}^{-x}}$, donc $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7\text{e}^{-x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. a. La courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes car $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{7\text{e}^{-x} + 1} = \frac{4}{0+1} = 4$
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{4\text{e}^x}{\text{e}^x + 7} = \frac{0}{0+7} = 0$
Donc en $-\infty$ asymptote à $\mathscr{C}_1$: la droite horizontale d'équation $y = 0$.
Donc en $+\infty$ asymptote à $\mathscr{C}_1$: la droite horizontale d'équation $y = 4$.

b. $f_1'(x) = \dfrac{4 \times 7\text{e}^{-x}}{(1 + 7\text{e}^{-x})^2}$, donc $f_1'(x) > 0$.
f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	
f_1	0	$\nearrow$	4

Par ce tableau on prouve que $0 < f_1(x) < 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$ car f_1 est strictement croissante et voir ses limites aux bornes .

3. a. On doit prouver que $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$ pour prouver que $\Omega(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de la courbe (d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$).

Soit $h \in \mathbb{R}, f_1(\ln(7)+h) = \dfrac{4}{7\mathrm{e}^{-\ln(7)-h}+1} = \dfrac{4}{7\mathrm{e}^{+\ln(\frac{1}{7})-h}+1} = \dfrac{4}{7\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{7})}\mathrm{e}^{-h}+1} = \dfrac{4}{7\times\frac{1}{7}\times\mathrm{e}^{-h}+1} = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-h}+1}$.

En changeant h en $-h$ on obtient : $f_1(\ln(7)-h) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{h}+1}$,

on additionne et divise par 2 :

$\frac{f_1(\ln(7)+h)+f_1(\ln(7)-h)}{2} = \dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^h+1}+\frac{4}{\mathrm{e}^{-h}+1}}{2} = \dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^h+1}+\frac{4\mathrm{e}^h}{1+\mathrm{e}^h}}{2} = \dfrac{4\mathrm{e}^h+4}{2(1+\mathrm{e}^h)} = \dfrac{4(\mathrm{e}^h+1)}{2(1+\mathrm{e}^h)} = 2$

Donc $I_1(\ln(7)\ ;\ 2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_1$

b. $f'(\ln(7)) = \frac{4\times 7\mathrm{e}^{-\ln(7)}}{(1+7\mathrm{e}^{-\ln(7)})^2} = \frac{28\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{7})}}{(1+7\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{7})})^2} = \frac{28\frac{1}{7}}{(1+7\frac{1}{7})^2} = \frac{4}{2^2} = 1$,

$f_1(\ln(7)) = 2$ d'après le 3. a. avec $h = 0$, donc l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point I_1 : $y = 1(x-\ln(7))+2$; $y = x-\ln(7)+2$.

c. Au point d'ordonnée 2 de $\mathscr{C}_1$, on trace une droite (rouge) de coefficient directeur 1 par la méthode de l'escalier.

4. a. Une primitive de la fonction $f_1 : x \longmapsto 4 \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{7+\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_1 : x \longmapsto 4\times\ln(7+\mathrm{e}^x)$.

b. La valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[O\ ;\ \ln 7]$ est

$\frac{1}{\ln(7)} \times (4\times\ln(7+\mathrm{e}^{\ln(7)}) - 4\ln(\mathrm{e}^0+7)) = \frac{4}{\ln(7)}\times\ln(\frac{14}{8}) = \frac{4}{\ln(7)}\times\ln(\frac{7}{4})$.

Partie B :

1. On remarque d'abord que $f_n(x) = f_1(nx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.Pour tout entier naturel n non nul le point $\mathrm{A}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$ si et seulement si $f_n(0) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $f_1(n\times 0) = \frac{1}{2}$si et seulement si $f_1(0) = \frac{1}{2}$or $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2. a. Pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection : on résout $f_n(x) = 2$

$f_n(x) = 2 \iff 4\mathrm{e}^{nx} = 2\mathrm{e}^{nx}+14 \iff \mathrm{e}^{nx} = 7 \iff nx = \ln(7) \iff x = \frac{\ln(7)}{n}$ (ici$n \in \mathbb{N}^*$). $\boxed{x = \frac{\ln(7)}{n}}$

b. $f_n'(x) = n\times f_1'(nx) = \dfrac{4n\times 7\mathrm{e}^{-nx}}{(1+7\mathrm{e}^{-nx})^2}$, donc si $x = \dfrac{\ln(7)}{n}$, $f_n'\left(\dfrac{\ln(7)}{n}\right) = \dfrac{4n\times 7\mathrm{e}^{-n\frac{\ln(7)}{n}}}{(1+7\mathrm{e}^{-n\frac{\ln(7)}{n}})^2} = n\times\frac{4\times 7\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{7})}}{(1+7\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{7})})^2} =$

$n\times\frac{4\times 1}{(1+7\times\frac{1}{7})^2} = n\times\frac{4}{(1+1)^2} = n.$

Une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point I_n est

$y = n(x-\frac{\ln(7)}{n})+2 = nx-\ln(7)+2$,

elles coupent toutes l'axe des y à la même ordonnée à l'origine.

c. Les droites (T_2)(gris) et (T_3)(rose).

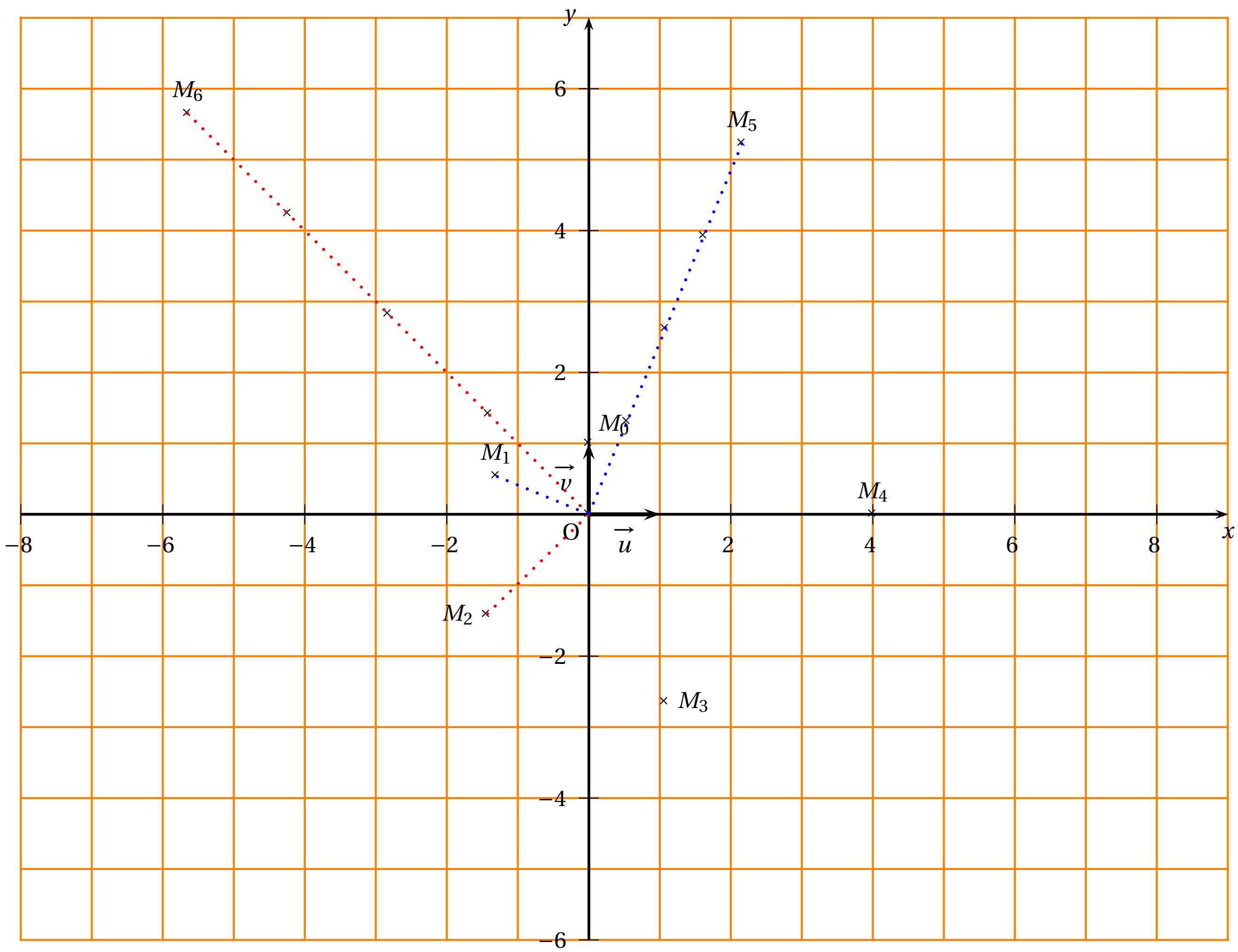
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

une primitive de f_n c'est $F_n(x) = \frac{4}{n}\ln(\mathrm{e}^{nx}+7)$ donc $u_n = \dfrac{n}{\ln 7} \times \frac{4}{n} \times \left(\ln(\mathrm{e}^{n\times\frac{\ln 7}{n}}+7) - \ln(8)\right) =$
$\dfrac{4}{\ln 7} \times \left(\ln(\mathrm{e}^{\ln 7}+7) - \ln(8)\right) = \dfrac{4}{\ln 7} \times (\ln(14) - \ln(8)) = \dfrac{4}{\ln 7} \times \left(\ln \dfrac{14}{8}\right) = \dfrac{4}{\ln 7} \times \left(\ln \dfrac{7}{4}\right)$ qui ne dépend pas de n.

La suite (u_n) est constante.

Exercice 3 (enseignement de spécialité)



Exercice 4