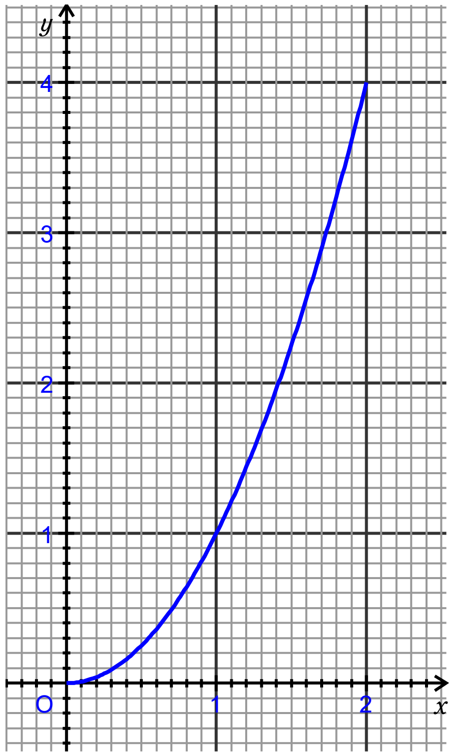
PRIMITIVES

Introduction 1



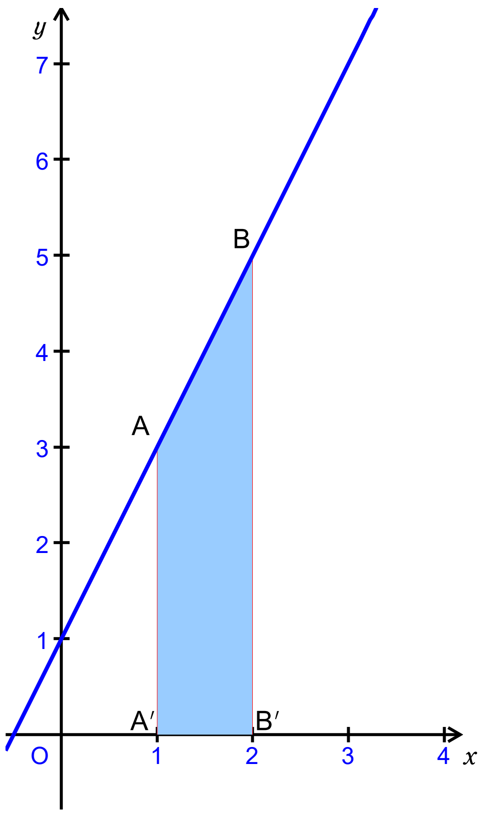
Tracer dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 5cm la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ pour $x \in [0 ; 2]$.

Évaluer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe Ox et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
On pourra pour cela utiliser une graduation au dixième et compter le nombre de carreaux se trouvant en-dessous de la courbe.
Les carreaux "entiers" seront comptés pour un, les carreaux "partiels" seront comptés pour $\frac{1}{2}$.

Faire la même évaluation pour l'aire de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe Ox et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

En déduire une évaluation de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe Ox et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

Introduction 2



On considère la fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 1$

Soit D la droite représentant f dans un repère orthonormé, soient A et B deux points de D et soient A′ et B′ les projetés de A et B sur l'axe Ox parallèlement à Oy.

On suppose que A et B ont pour abscisses respectives 1 et 2.

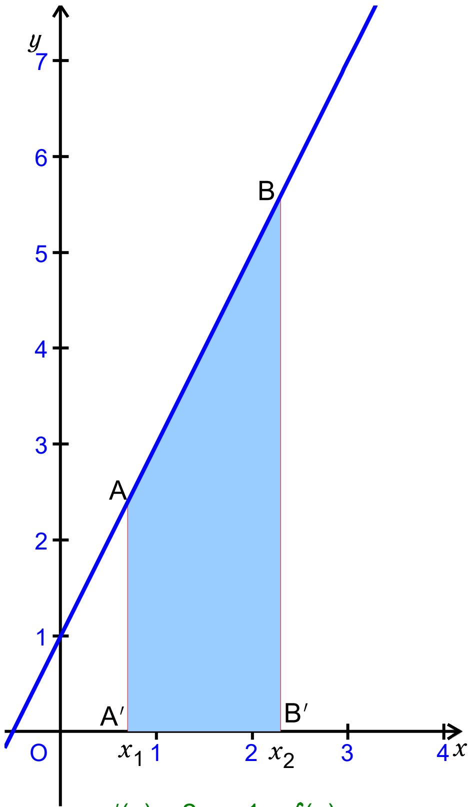
Le quadrilatère ABB′A′ a deux cotés parallèles et un angle droit, donc ABB′A′ est un trapèze rectangle.

L'aire $\mathscr{A}$ d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est égale, en unités d'aire, à $\frac{B + b}{2} \times h$

Donc l'aire du trapèze ABB′A′ est : $\mathscr{A} = \frac{\text{AA}' + \text{BB}'}{2} \times \text{A}'\text{B}'$

c'est-à-dire $\mathscr{A} = \frac{3 + 5}{2} \times 1$ donc $\mathscr{A} = 4$.

Introduction 3



D étant la droite représentant la fonction affine $f(x) = 2x + 1$, on considère maintenant les points A et B d'abscisses respectives x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$.

ABB′A′ est un trapèze rectangle.

Son aire, en unités d'aire, est : $\mathscr{A} = \dfrac{AA' + BB'}{2} \times A'B'$

Sachant que A et B sont sur la droite D, leurs ordonnées respectives sont : $f(x_1) = 2x_1 + 1$ et $f(x_2) = 2x_2 + 1$

On a donc $AA' = f(x_1)$; $BB' = f(x_2)$ et $A'B' = x_2 - x_1$

Donc $\mathscr{A} = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \times (x_2 - x_1)$

$$\mathscr{A} = \frac{2x_1 + 1 + 2x_2 + 1}{2} \times (x_2 - x_1)$$

$$\mathscr{A} = (x_1 + x_2 + 1)(x_2 - x_1)$$

$$\mathscr{A} = x_1x_2 - (x_1)^2 + (x_2)^2 - x_2x_1 + x_2 - x_1$$

$$\mathscr{A} = (x_2)^2 + x_2 - (x_1)^2 - x_1$$

$$\mathscr{A} = \left[(x_2)^2 + x_2\right] - \left[(x_1)^2 + x_1\right]$$

Si on appelle g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^2 + x$, on peut écrire $\mathscr{A} = g(x_2) - g(x_1)$.

On peut remarquer que g est dérivable sur IR et que pour tout $x \in$ IR, on a $g'(x) = 2x + 1 = f(x)$.
La fonction g est une fonction dont la dérivée est f.
On dit que g est une primitive de f.

Retour sur Introduction 1

La fonction f étant définie par $f(x) = x^2$, trouver une fonction g dont la dérivée est f.
A quoi est égal $g(1) - g(0)$; $g(2) - g(1)$; $g(2) - g(0)$
Comparer ces résultats aux déterminations des aires faites à partir de la courbe.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Exemple

La fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x$ a pour primitive F définie sur IR par $F(x) = x^2$.
En effet F est dérivable sur IR et on a $F' = f$.
On aurait pu choisir F définie par $F(x) = x^2 + 1$ ou $F(x) = x^2 - 5$ ou plus généralement, si k est une constante réelle, $F(x) = x^2 + k$. Une fonction n'a pas une seule primitive.

Exercice 01

f est une fonction définie sur IR . Trouver dans chacun des cas suivants une primitive de f .

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = 3x$ d) $f(x) = 3x^2$ e) $f(x) = -4x + 3$

Exercice 02

f est une fonction définie sur IR . Trouver dans chacun des cas suivants une primitive de f

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 7x - 1$ c) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^2$ d) $f(x) = 4x^3 + x$ e) $f(x) = \dfrac{x - 5}{3}$

Exercice 03

f est une fonction définie sur IR . Trouver dans chacun des cas suivants une primitive de f

a) $f(x) = -5x^2$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = 2x^5 + 3x$ d) $f(x) = \dfrac{3x^4 + x}{2}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}$

Propriété

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 04

Trouver dans chacun des cas suivants l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = -x^2 + 1$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ I = $]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ I = $]0\,;+\infty[$

e) $f(x) = e^x$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

Exercice 05

Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x^2}$

Déterminer les primitives de f sur $]0\,;+\infty[$. Existe-t-il une primitive de f prenant la valeur 2 lorsque $x = 1$?

Propriété

Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I ; soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

Primitives des fonctions usuelles

On donne ci-dessous les primitives de certaines fonctions connues.
Ces primitives ont été obtenues à partir des dérivées connues.
L'intervalle I devra être convenablement choisi.
k désigne une constante réelle.

Fonction	Primitives
$f(x) = 0$	$F(x) = k$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + k$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + k$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$

Exercice 06

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

a) $f(x) = x^9$

b) $f(x) = 5x + \dfrac{2}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$

Exercice 07

Dans chaque cas donner la primitive F de f vérifiant la condition imposée :

a) f définie sur IR par : $f(x) = x^2 + 3x - 1$; $F(2) = 3$

b) f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{3}{x^2}$; $F(3) = -1$

Propriétés

Soit I un intervalle.
Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I, alors F + G est une primitive de $f + g$ sur I.
Si F est une primitive de f sur I et si a est un réel, alors aF est une primitive de af sur I.

Remarques

Les propriétés ci-dessus ont été utilisées "naturellement" dans les exercices précédents.
Attention : Une primitive d'un produit ne sera pas obtenue en prenant le produit des primitives, puisque la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Exercice 08

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

a) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{3}{x^2}$ b) $f(x) = 3x + 5e^x$ c) $f(x) = (x - 1)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I a des primitives sur I.

Remarques

Certaines fonctions ont des primitives mais il peut être très compliqué de les trouver.
Il est même parfois impossible d'exprimer les primitives d'une fonction à partir des fonctions connues.
C'est le cas par exemple pour la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$

Exercice 09

Justifier que, dans chacun des cas, la fonction f a pour primitive la fonction F donnée :

1°) $f(x) = \ell n(x)$; $F(x) = x\,\ell n(x) - x$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$

2°) $f(x) = 2e^{3x}$; $F(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x}$ pour $x \in$ IR

3°) $f(x) = \dfrac{2\ell n(x) + 1}{x}$; $F(x) = \left[\ell n(x)\right]\left[\ell n(x) + 1\right]$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$

Propriétés

Une fonction de la forme $u' \times e^u$ a pour primitives les fonctions de la forme $e^u + k$, avec $k \in$ IR.

Exercice 10

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner une primitive de f sur IR.

a) $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ b) $f(x) = -e^{-x}$ c) $f(x) = 5e^{5x}$

Exercice 11

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 2x + 1 - e^x$ I = IR b) $f(x) = e^{2x}$ I = IR c) $f(x) = 25\,e^{-0,5x}$ I = IR

d) $f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$ I = IR e) $f(x) = -0,0032x^3 + 5 - \dfrac{0,025}{x}$ I = $]0\,;+\infty[$

Exercice 12

Justifier que, dans chacun des cas, la fonction f a pour primitive la fonction F donnée :

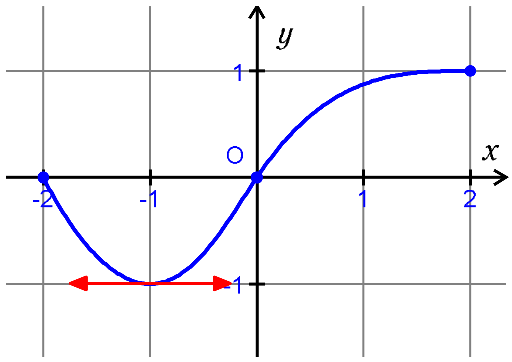
1°) $f(x) = (-x + 2)e^{0,5x}$; $F(x) = (-2x + 8)e^{0,5x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

2°) $f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$; $F(x) = (1 - 3x)e^{-x} + 2x$ pour $x \in \mathbb{R}$

3°) $f(x) = 10x - 8\ell n(x)$; $F(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ell n(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.
Soit F une primitive de f.
Pour chacune des questions suivantes, une réponse et une seule est juste.



1°) Sur $[-2 ; 0]$

- F est croissante
- F est décroissante
- F n'est ni croissante ni décroissante

2°) Sur $[-1 ; 2]$

- F est croissante
- F est décroissante
- F n'est ni croissante ni décroissante

3°)

- $F(0) = 0$
- $F(0) = 1$
- On ne peut pas connaître $F(0)$

4°) En son point d'abscisse 0, la courbe représentative de la fonction F a

- une tangente parallèle à l'axe (Ox)
- une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$
- une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$

5°) Sur $[0 ; 2]$

- F est positive
- F est négative
- On ne peut pas connaître le signe de F

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$.

Pour chacune des questions suivantes, une réponse et une seule est juste.

1°) F est une primitive de f lorsque F est définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

- $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
- $F(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1}$
- $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$

2°) Si F est une primitive de f sur $]-1 ; +\infty[$, alors

- $F'(0) = -1$
- $F'(0) = 1$
- On ne peut pas connaître $F'(0)$

3°) Si F est une primitive de f sur $]-1 ; +\infty[$, alors

- $F(1) = 1$
- $F(1) = \dfrac{1}{2}$
- On ne peut pas connaître $F(1)$

4°) En son point d'abscisse 1, la courbe représentative de la fonction F a

- une tangente parallèle à l'axe (Ox)
- une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$
- Une tangente parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$

5°) F n'est pas une primitive de f lorsque F est définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

- $F(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x + 1}$
- $F(x) = 2x + \dfrac{2}{x + 1}$
- $F(x) = x + 2 + \dfrac{2}{x + 1}$