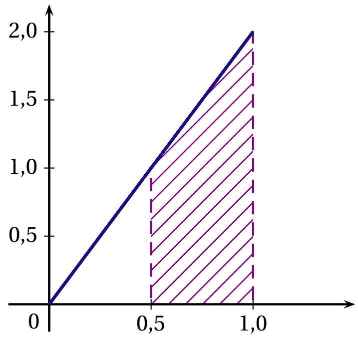
EXERCICE 1

(*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2016*)

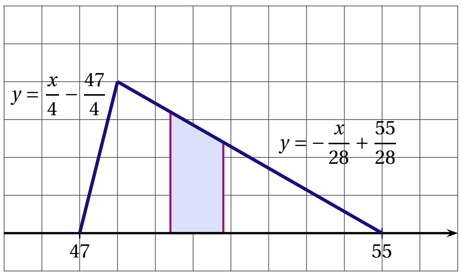
La fonction f est définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2x$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f.
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1. a) Quelle est la valeur, en unité d'aire, de la surface hachurée ? Préciser la démarche utilisée.
   b) Interpréter ce résultat en terme de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47;55]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{47}{4} & \text{si } 47 \leqslant x < 48 \\ -\dfrac{x}{28} + \dfrac{55}{28} & \text{si } 48 \leqslant x \leqslant 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47;55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
   On a $C \in [47;55]$.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49{,}4;50{,}8]$.
   b) Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum ?
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable C. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2\mathrm{e}-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1{,}2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

EXERCICE 4

On s'intéresse à la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1. a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction ln.

   b) Trouver un nombre réel $a>1$ tel que $\displaystyle\int_1^a \ln x\,\mathrm{d}x=1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;a]$.

2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1;a]$.

   a) Calculer $p(X\leqslant 2)$.

   b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

EXERCICE 5

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

EXERCICE 6

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?
2. Calculer la probabilité que le point M :

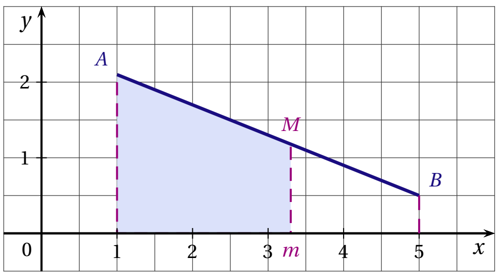
   a) soit le milieu I du segment $[AB]$;

   b) soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;

   c) soit plus près du point B que du milieu I.

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le segment $[AB]$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1;5]$ par $f(x)=-0{,}4x+2{,}5$. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note m son abscisse.



1. Soit E l'évènement « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$ est inférieure à 4 ».

   a) Justifier que la situation relève d'une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ que l'on précisera.

   b) Calculer la probabilité de l'évènement E.

2. Calculer la probabilité de l'évènement F « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$ est supérieure à 1 ».

EXERCICE 8

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X. Quelle est son espérance mathématique ?

2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-240}{12}$ par la loi normale centrée réduite. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $P(225 \leqslant X \leqslant 270) = P(-1{,}25 \leqslant Z \leqslant 2{,}5)$.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270 ?
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

EXERCICE 9

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(180; 10{,}5^2\right)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(170 \leqslant X \leqslant 200)$; $P(X \leqslant 150)$; $P(X \geqslant 160)$; $P(X \geqslant 190)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X < a) = 0{,}875$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 10

L'admission en première année d'un groupe d'écoles a lieu après une épreuve écrite et une épreuve orale selon les modalités suivantes :

— À l'issue de l'épreuve écrite, 60% des candidats sont déclarés admissibles à l'oral.

— $\dfrac{1}{3}$ des candidats admissibles sont admis à la fin de l'épreuve orale.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat soit admis.
2. On suppose que n candidats se sont inscrits.
   a) Déterminer en fonction de n, la probabilité p_n qu'au moins un candidat soit admis.
   b) Quel est le plus petit nombre n de candidats inscrits pour que $p_n > 0{,}999$?
3. Les épreuves d'admission ont lieu dans plusieurs centres, chaque centre gérant l'admission d'un groupe de 225 candidats.
   On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 225 candidats associe le nombre de candidats admis.
   On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 6$.
   a) Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit compris entre 35 et 60.
   b) Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit inférieur à 30.

EXERCICE 11

PARTIE A

Un magasin vend deux sortes d'articles électroménager ou informatique. Pour chaque article une extension de garantie est proposée lors de l'achat.
Une étude statistique sur les factures des ventes réalisées a permis d'établir que :

— L'électroménager représente 40 % des ventes.

— L'extension de garantie a été souscrite pour 12 % des appareils d'électroménager vendus et pour 24 % des appareils du rayon informatique vendus.

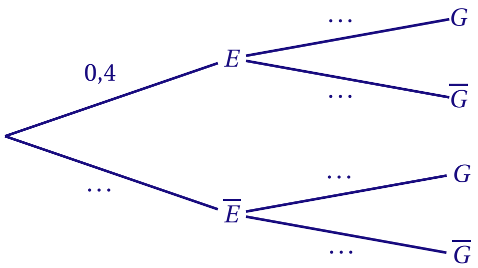
On prélève au hasard la facture d'un appareil vendu. On note :

— E l'évènement « la facture est celle d'un appareil électroménager »

— G l'évènement « une extension de garantie a été souscrite »

On rappelle que si A et B sont deux évènements, la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2. Calculer la probabilité que la facture choisie soit celle d'un appareil électroménager vendu avec une extension de garantie.
3. Montrer que $P(G) = 0{,}192$.
4. Calculer $P_G(\overline{E})$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} près.

À la fin d'un mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures, associe son montant en euros.
On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 125$.

1. Calculer $P(400 \leqslant M \leqslant 900)$.
2. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 300 euros le magasin propose le paiement en trois fois sans frais.

   Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais.

EXERCICE 12

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Pour contacter une compagnie d'assurance, deux possibilités sont offertes :

— se rendre en agence ;

— à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients qui se rendent à l'agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.
À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

— 380 se sont rendus en agence ;

— parmi les clients qui se sont rendus en agence, 95 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil ;

— parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'ils n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

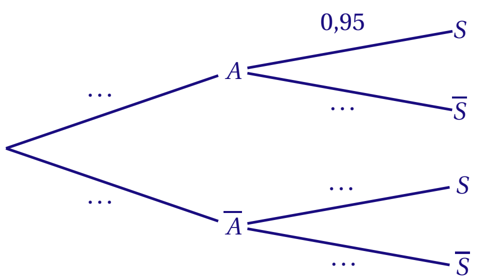
On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

— A : « Le client s'est rendu en agence »

— S : « Le client est satisfait de l'accueil »

On rappelle que l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$, que la probabilité de l'évènement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $P_B(A)$.
Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-3}, si nécessaire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
3. Montrer que la probabilité de S est 0,888.
4. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

PARTIE B

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros.
L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres ?
2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.
3. Calculer $P(X > 1000)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2}.
4. À l'aide de la calculatrice, estimer la valeur du nombre réel a, arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geqslant a) = 0{,}04$.
   Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 13 (*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017*)

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.
Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.
Ils ont également constaté, en observant les années précédentes, que :

— 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course ;
— 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course ;
— 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

PARTIE A

À la fin de la course, on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis. On note :

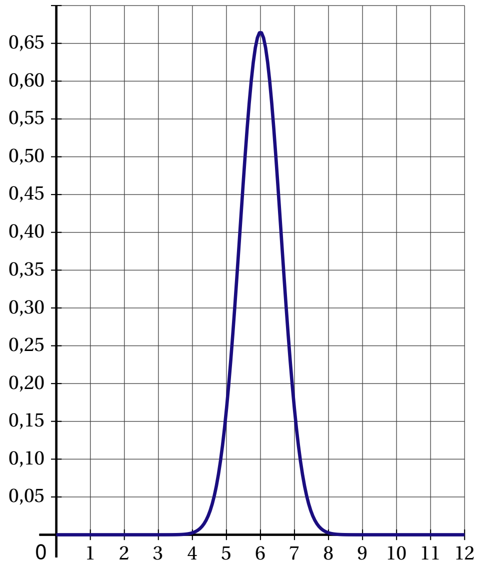
— V l'évènement « Le coureur a choisi le parcours vert » ;
— B l'évènement « Le coureur a choisi le parcours bleu » ;
— R l'évènement « Le coureur a choisi le parcours rouge » ;
— A l'évènement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $V \cap A$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert ?
4. Démontrer que $P(B \cap A) = 0{,}012$.
5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

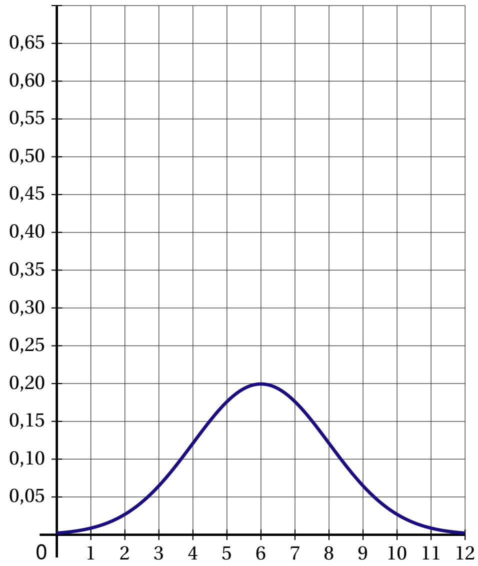
PARTIE B

Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



graphique 1



graphique 2

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.
   a) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h ?
   b) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?

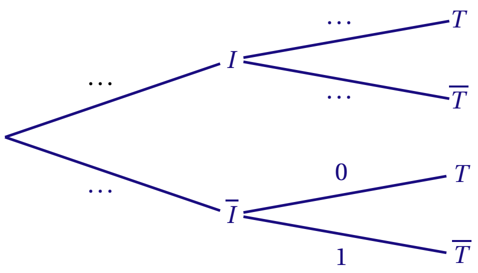
EXERCICE 14 (*D'après sujet bac Amérique du Nord 2017*)

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.
On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1er janvier 2016.
On considère les évènements :

— I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;
— T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

PARTIE A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

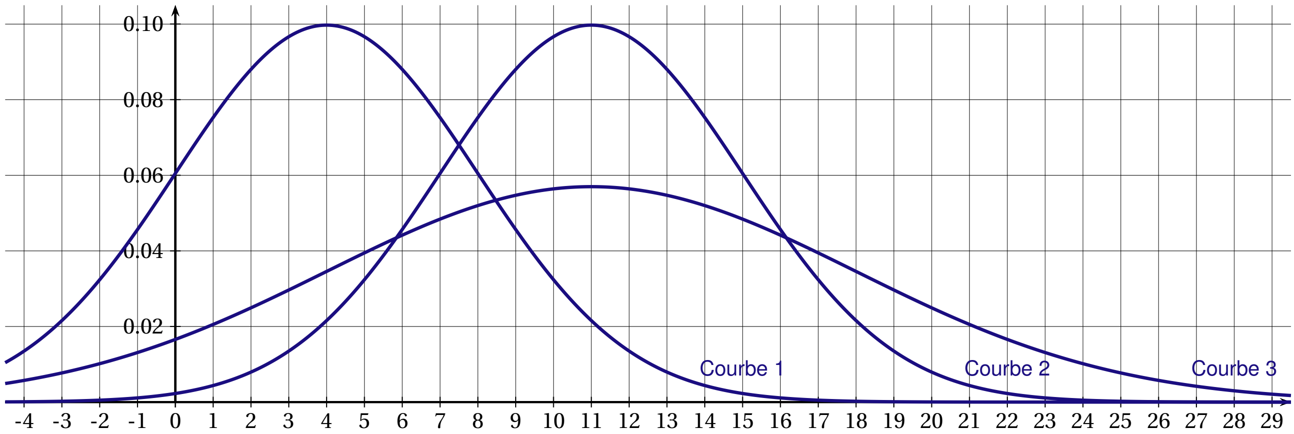


2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
3. Montrer que $p(T) = 0{,}002$.

PARTIE B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



EXERCICE 15

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

La compagnie aérienne Truc-Air utilise pour ses vols moyen-courriers des avions pouvant transporter 200 passagers. Suite à une étude qui a permis d'établir que 10% des clients qui ont réservé un vol ne se présentent pas à l'embarquement, la direction commerciale a décidé de pratiquer le « surbooking ».

PARTIE A

La compagnie accepte pour un vol donné, 210 réservations.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$.
2. On choisit d'approcher la loi binomiale de X par une loi normale d'espérance $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X)$. Soit Y l'approximation normale de X.
   a) Déterminer $P(Y \leqslant 200)$.
   b) Déterminer un intervalle I de centre 189 tel que $P(Y \in I) \approx 0{,}95$.
3. La compagnie prend-elle un risque important en acceptant 210 réservations pour ce vol ?

PARTIE B

La compagnie accepte pour un vol donné n réservations.
On note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0{,}9)$.
On cherche à déterminer le nombre maximal de réservations pour que la probabilité de l'évènement « $X_n \leqslant 200$ » soit supérieure à 0,95.
On admet que la loi de probabilité de X_n peut être approchée par une loi normale d'espérance $\mu = E(X_n) = 0{,}9n$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X_n) = 0{,}3\sqrt{n}$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$ qui suit la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $X_n \leqslant 200$ équivaut à $Z_n \leqslant \dfrac{200 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$.
   b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-3} près, du réel k tel que $P(Z_n \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.
   c) En déduire que n est solution de l'inéquation $0{,}9n + 0{,}4935\sqrt{n} - 200 \leqslant 0$.
2. a) On pose $x = \sqrt{n}$ avec $x \geqslant 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $0{,}9x^2 + 0{,}4935x - 200 \leqslant 0$.
   b) En acceptant le risque maximum de 5% de voir plus de 200 passagers se présenter à l'embarquement, quel est le nombre maximal de réservations que cette compagnie peut prendre pour ce vol ?