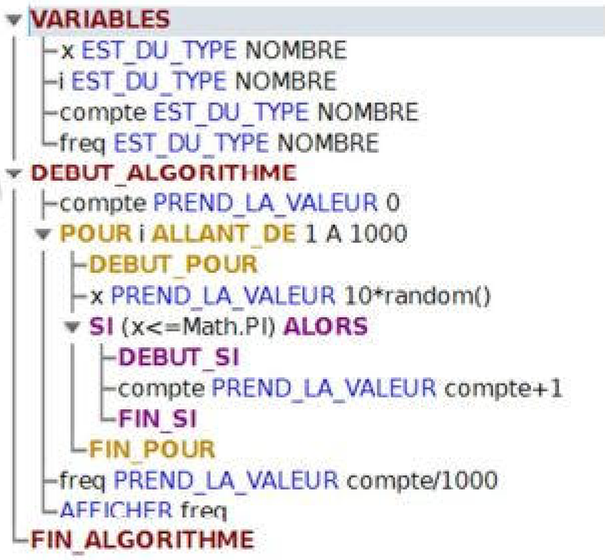
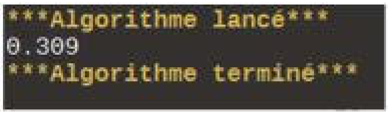
Exercice 02

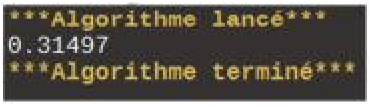


1°) L'instruction :
X PREND_LA_VALEUR 10*random().
permet de choisir un nombre au hasard entre 0 et 10
La boucle
POUR i ALLANT_DE 1 à 1000
permet de répéter 1000 fois ce choix
La condition
SI (X<=Math.PI) ALORS
permet de compter le nombre de fois que l'on obtient un nombre inférieur ou égal à π
L'instruction
freq PREND_LA_VALEUR compte/1000
permet de calculer la fréquence de l'événement.

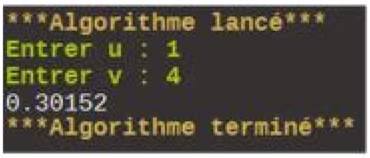
Lorsqu'on utilise cet algorithme, on obtient une fréquence proche de 0,3



2°) Pour faire 100 000 choix du nombre aléatoire il suffit de modifier la ligne
POUR i ALLANT_DE 1 à 1000 en POUR i ALLANT_DE 1 à 100000
et la ligne
freq PREND_LA_VALEUR compte/1000 en freq PREND_LA_VALEUR compte/100000
On obtient ($X \leqslant \pi$) avec une fréquence proche de 0,314



3°) En utilisant l'algorithme ci-contre,
avec, par exemple $u = 1$ et $v = 4$
On obtient : ($1 < X \leqslant 4$) avec une fréquence proche de 0,3 .



4°) Les résultats trouvés sont en accord avec les résultats obtenus dans l'exercice 1.

Exercice 03

X suit la loi uniforme sur $[-1\ ;\ 1]$. La fonction de densité est définie par $f(t) = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$.

On a $p(X \leqslant 0{,}3) = p(-1 \leqslant X \leqslant 0{,}3) = \displaystyle\int_{-1}^{0{,}3} \frac{1}{2}\,dt = \frac{0{,}3-(-1)}{2}$ donc $p(X \leqslant 0{,}3) = \dfrac{1{,}3}{2} = 0{,}65$.

$p\left(-\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant \dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,dt = \frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}$ donc $p\left(-\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

$(X > 0{,}3)$ est l'événement contraire de $(X \leqslant 0{,}3)$. Donc $p(X > 0{,}3) = 1 - p(X \leqslant 0{,}3)$.
On a vu que $p(X \leqslant 0{,}3) = 0{,}65$ donc $p(X > 0{,}3) = 1 - 0{,}65$ donc $p(X > 0{,}3) = 0{,}35$.

$p\left(X \in \left]\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[\right) = p\left(\dfrac{1}{4} < X < \dfrac{3}{4}\right) = p\left(\dfrac{1}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3}{4}\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2}\,dt = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{2}$ donc $p\left(X \in \left]\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[\right) = \dfrac{1}{4}$.

$\left(X \notin \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]\right)$ est l'événement contraire de $\left(X \in \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]\right)$.

donc $p\left(X \notin \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]\right) = 1 - p\left(X \in \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]\right) = 1 - \displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,dt = 1 - \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}{2} = 1 - \frac{1}{6}$

donc $p\left(X \notin \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]\right) = \dfrac{5}{6}$.

Exercice 05

On choisit un nombre réel α au hasard dans $[0 ; 1]$.
α correspond donc à une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.
La fonction de densité est définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-0} = 1$.

Pour que le premier nombre de l'écriture décimale de α soit un 3, il faut et il suffit que α se trouve dans l'intervalle $[0,3 ; 0,4[$.

On a $p(\alpha \in [0,3 ; 0,4[) = \displaystyle\int_{0,3}^{0,4} 1 \, dx = 0,4 - 0,3 = 0,1$

La probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le premier nombre après la virgule soit un 3 est 0,1 .

Pour que le premier nombre de l'écriture décimale de α soit pair, il faut et il suffit que α se trouve dans l'ensemble $[0 ; 0,1[\cup [0,2 ; 0,3[\cup [0,4 ; 0,5[\cup [0,6 ; 0,7[\cup [0,8 ; 0,9[\cup \{1\}$
Les différents ensembles formant cette réunion étant disjoints, on peut faire la somme de leurs probabilités.
On a $p([0 ; 0,1[) = p([0,2 ; 0,3[) = p([0,4 ; 0,5[) = p([0,6 ; 0,7[) = p([0,8 ; 0,9[) = 0,1$ et $p(\{1\}) = 0$.
On peut en déduire que :
La probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le premier nombre après la virgule soit pair est 0,5 .

Pour tout $u \in [0 ; 1]$ et tout $v \in [0 ; 1]$ tels que $u \leqslant v$ on a $p(u \leqslant \alpha \leqslant v) = \dfrac{v-u}{1} = v - u$

La probabilité que α soit inférieur à 0,95 sachant qu'il est supérieur à 0,6 est $p_{[0,6 ; 1]}([0 ; 0,95])$.
La formule des probabilités conditionnelles permet d'écrire :

$$p_{[0,6 ; 1]}([0 ; 0,95]) = \frac{p([0 ; 0,95] \cap [0,6 ; 1])}{p([0,6 ; 1])} = \frac{p([0,6 ; 0,95])}{p([0,6 ; 1])} = \frac{0,95 - 0,6}{1 - 0,6} = \frac{0,35}{0,40} = 0,875$$

La probabilité que α soit inférieur à 0,95 sachant qu'il est supérieur à 0,6 est 0,875 .

La probabilité que α ait pour deuxième chiffre après la virgule un multiple de 3 sachant qu'il est supérieur à 0,963 est $p_{[0,963 ; 1]}([0,963 ; 0,97[\cup [0,99 ; 1[)$.

On a $p_{[0,963 ; 1]}([0,963 ; 0,97[\cup [0,99 ; 1[) = \dfrac{p([0,963 ; 0,97[\cup [0,99 ; 1[)}{p([0,963 ; 1])} = \dfrac{0,007 + 0,01}{0,037} = \dfrac{0,017}{0,037}$

La probabilité que α ait pour deuxième chiffre après la virgule un multiple de 3 sachant qu'il est supérieur à 0,963 est $\dfrac{0,017}{0,037}$ soit environ 0,459 .

Exercice 06

1°) $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 \}$ et la probabilité sur Ω est uniforme.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + \dots + 10 \times \frac{1}{10} = (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \times \frac{1}{10}$$

Donc $E(X) = \frac{10 \times 11}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{11}{2}$ donc $E(X) = 5{,}5$.

2°) $E(X) = 0{,}1 \times \frac{1}{100} + 0{,}2 \times \frac{1}{100} + 0{,}3 \times \frac{1}{100} + \dots + 10 \times \frac{1}{100} = (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + \dots + 10) \times \frac{1}{100}$.

$$E(X) = \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{100}{10}\right) \times \frac{1}{100} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 100}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{\frac{100 \times 101}{2}}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{101}{20}$$

donc $E(X) = 5{,}05$.

3°) En coupant l'intervalle I en 1 000 intervalles de même amplitude, on obtiendra :

$$E(X) = 0{,}01 \times \frac{1}{1\,000} + 0{,}02 \times \frac{1}{1\,000} + 0{,}03 \times \frac{1}{1\,000} + \dots + 10 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{\frac{1\,000 \times 1\,001}{2}}{100} \times \frac{1}{1\,000} = \frac{1\,001}{200}$$

donc $E(X) = 5{,}005$.

En coupant l'intervalle I en 10 000 intervalles de même amplitude, on obtiendra :

$E(X) = \frac{10\,001}{2\,000}$ donc $E(X) = 5{,}0005$.

4°) En choisissant un nombre X dans l'intervalle I, on peut conjecturer que E(X) sera égal à 5.

5°) f est définie sur l'intervalle I par $f(x) = \frac{1}{10}$.

$$\int_0^{10} x\, f(x)\, dx = \int_0^{10} x \times \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x\, dx = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{100}{2} - 0\right)$$

On obtient $\int_0^{10} x\, f(x)\, dx = 5$.

Exercice 08

On suppose que l'on modélise la situation par une loi (non uniforme) ayant pour densité la fonction f définie sur $[1~;~4]$ par $f(x) = \lambda x$ où λ est un réel fixé.

1°) La fonction de densité f doit être telle que $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = 1$.

Or on a $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \lambda x\,dx = \left[\frac{\lambda}{2}x^2\right]_1^4 = \frac{16\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{15\lambda}{2}$

Le réel λ doit donc nécessairement vérifier $\dfrac{15\lambda}{2} = 1$ donc $\lambda = \dfrac{2}{15}$.

2°) Pour tout intervalle $[u~;~v]$ contenu dans $[1~;~4]$ on a : $p(X \in [u~;~v]) = \displaystyle\int_u^v f(x)\,dx$.

Donc : $p(2 < X \leqslant 3) = p(2 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{2}{15}x\,dx = \left[\frac{1}{15}x^2\right]_2^3 = \frac{1}{15} \times 9 - \frac{1}{15} \times 4 = \frac{5}{15}$

Donc $p(2 < X \leqslant 3) = \dfrac{1}{3}$.

De même $p(X < 2) = p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{2}{15}x\,dx = \left[\frac{1}{15}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{15} \times 4 - \frac{1}{15} \times 1 = \frac{3}{15}$

Donc $p(X < 2) = \dfrac{1}{5}$.

et $p(X > 3{,}95) = p(3{,}95 \leqslant X \leqslant 4) = \displaystyle\int_{3{,}95}^4 f(x)\,dx = \int_{3{,}95}^4 \frac{2}{15}x\,dx = \left[\frac{1}{15}x^2\right]_{3{,}95}^4 = \frac{1}{15} \times 4^2 - \frac{1}{15} \times 3{,}95^2$

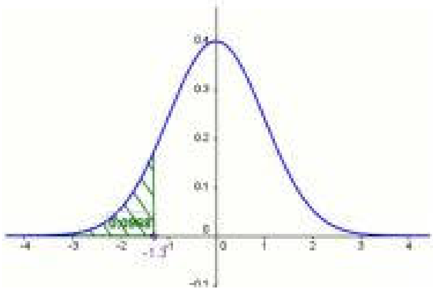
Donc $p(X > 3{,}95) = \dfrac{0{,}3975}{15} = 0{,}0265$.

3°) Par définition, l'espérance mathématique de X est donnée par $E(X) = \displaystyle\int_1^4 x\,f(x)\,dx$

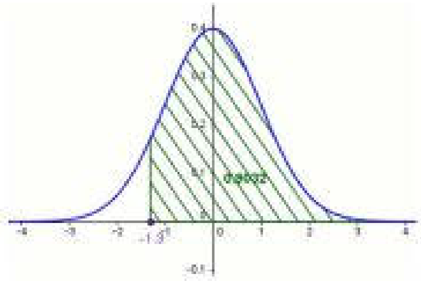
donc $E(X) = \displaystyle\int_1^4 \frac{2}{15}x^2\,dx = \left[\frac{2}{45}x^3\right]_1^4 = \frac{2}{45} \times 4^3 - \frac{2}{45} \times 1^3$ donc $E(X) = \dfrac{126}{45} = 2{,}8$

Exercice 11

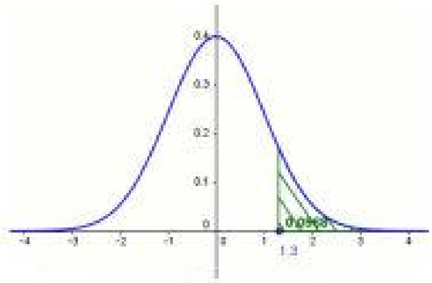
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
On donne $p(X \leqslant -1{,}3) \approx 0{,}0968$.
Cela peut se visualiser en termes d'aire sur le graphique ci-contre :



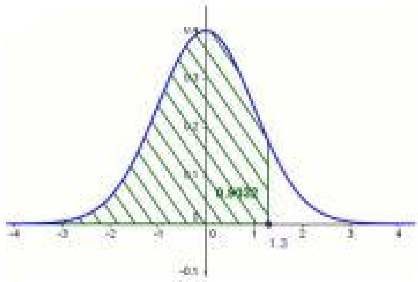
$p(X \geqslant -1{,}3)$ est l'événement contraire de $(X < -1{,}3)$
On a donc $p(X \geqslant -1{,}3) = 1 - p(X < -1{,}3)$
et on sait que $p(X < -1{,}3) = p(X \leqslant -1{,}3)$ avec $p(X \leqslant -1{,}3) \approx 0{,}0968$
On en déduit que $p(X \geqslant -1{,}3) \approx 1 - 0{,}0968$
donc $p(X \geqslant -1{,}3) \approx 0{,}9032$



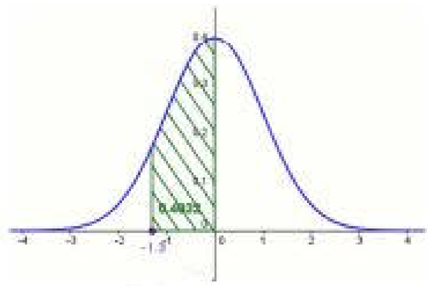
D'après la symétrie de la courbe, on a $p(X \geqslant 1{,}3) = p(X \leqslant -1{,}3)$
donc $p(X \geqslant 1{,}3) \approx 0{,}0968$



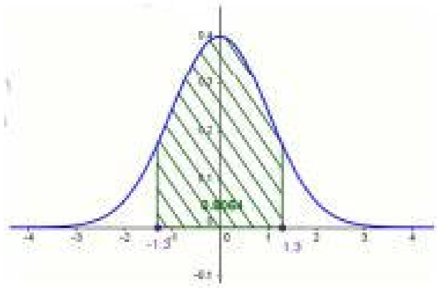
D'après la symétrie de la courbe, on a $p(X \leqslant 1{,}3) = p(X \geqslant -1{,}3)$
donc $p(X \leqslant 1{,}3) \approx 0{,}9032$



On sait que $p(X \leqslant 0) = 0{,}5$ donc $p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 0) = 0{,}5 - p(X < -1{,}3)$
donc $p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 0) \approx 0{,}5 - 0{,}0968$
c'est-à-dire $p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 0) \approx 0{,}4032$



D'après la symétrie de la courbe, on a
$p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 1{,}3) = 2 \times p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 0)$
donc $p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 1{,}3) \approx 2 \times 0{,}4032$
c'est-à-dire $p(-1{,}3 \leqslant X \leqslant 1{,}3) \approx 0{,}8064$



Exercice 13

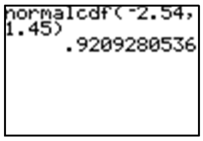
X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
Pour tout réel x on note $F(x) = p(X < x)$. (F s'appelle la fonction de répartition de la loi de probabilité).

Pour tous réels u et v tels que $u < v$, on peut écrire :
$p(X < u) + p(u \leqslant X < v) = p(X < v)$ c'est-à-dire $F(u) + p(u \leqslant X < v) = F(v)$
Donc $p(u \leqslant X < v) = F(v) - F(u)$.

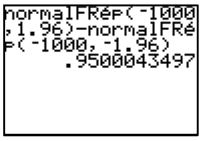
On a donc $p(1{,}21 \leqslant X < 2{,}35) = F(2{,}35) - F(1{,}21)$
On obtient $p(1{,}21 \leqslant X < 2{,}35) \approx 0{,}104$

$p(-2{,}54 < X < 1{,}45) = F(1{,}45) - F(-2{,}54)$
On obtient $p(-2{,}54 < X < 1{,}45) \approx 0{,}921$

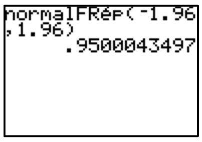
ou



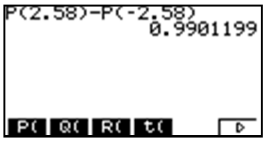
$p(-1{,}96 < X < 1{,}96) = F(1{,}96) - F(-1{,}96)$
On obtient $p(-1{,}96 < X < 1{,}96) \approx 0{,}950$



ou

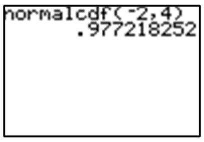


$p(-2{,}58 < X < 2{,}58) = F(2{,}58) - F(-2{,}58)$
On obtient $p(-2{,}58 < X < 2{,}58) \approx 0{,}990$

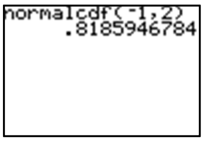


Exercice 15

1°) Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
En utilisant une calculatrice on vérifie que $p(0 < Z < 1) \approx 0{,}341$.



De même on obtient $p(-2 < Z < 4) \approx 0{,}977$.



et $p(-1 < Z < 2) \approx 0{,}819$.

2°) a) L suit une loi normale $\mathcal{N}(150 ; 0{,}25)$ on a donc $\mu = 150$ et $\sigma^2 = 0{,}25$ donc $\sigma = 0{,}5$.
Donc $\dfrac{L - 150}{0{,}5}$ suit la loi normale centrée réduite ; on peut donc prendre $Z = \dfrac{L - 150}{0{,}5}$.

On peut écrire $149 < L < 152 \iff -1 < L - 150 < 2 \iff \dfrac{-1}{0{,}5} < \dfrac{L - 150}{0{,}5} < \dfrac{2}{0{,}5}$

$$\iff -2 < \frac{L - 150}{0{,}5} < 4 \iff -2 < Z < 4$$

On a donc $p(149 < L < 152) = p(-2 < Z < 4)$.
On obtient alors $p(149 < L < 152) \approx 0{,}977$.

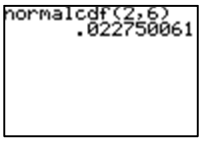
b) On peut écrire $149{,}5 < L < 151 \iff -0{,}5 < L - 150 < 1 \iff \dfrac{-0{,}5}{0{,}5} < \dfrac{L - 150}{0{,}5} < \dfrac{1}{0{,}5}$

$$\iff -1 < \frac{L - 150}{0{,}5} < 2 \iff -1 < Z < 2$$

On a donc $p(149{,}5 < L < 151) = p(-1 < Z < 2)$.
On obtient alors $p(149{,}5 < L < 151) \approx 0{,}819$.
La probabilité qu'une vis soit acceptée est environ 0,819 .

On peut écrire $151 < L < 153 \iff 1 < L - 150 < 3 \iff \dfrac{1}{0{,}5} < \dfrac{L - 150}{0{,}5} < \dfrac{3}{0{,}5}$

$$\iff 2 < \frac{L - 150}{0{,}5} < 6 \iff 2 < Z < 6$$



On a donc $p(151 < L < 153) = p(2 < Z < 6)$.
On obtient alors $p(151 < L < 153) \approx 0{,}023$.
La probabilité qu'une vis soit rectifiée est environ 0,023 .

Dans tous les autres cas, la vis est rejetée.
La probabilité qu'une vis soit rejetée est donc à peu près égale à $1 - 0{,}819 - 0{,}023$.
La probabilité qu'une vis soit rejetée est environ 0,158 .

Exercice 21

1°) D'après la symétrie de la courbe, on a $\mu = 3$.

2°) On trouve avec la calculatrice :

$p(2,5 \leqslant Y \leqslant 4) \approx 0,337$

3°) On sait que lorsqu'une variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, on a
$p(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ à 10^{-2} près
pour que $p(3 - h \leqslant Y \leqslant 3 + h) \approx 0,95$ il suffit de prendre $h = 2\sigma$ donc $h = 3,4$

Exercice 23

1°) Le constructeur affirmant que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,17, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec $p = 0{,}17$.

Pour $n = 40$ on obtient :

$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}17 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}17 \times 0{,}83}}{\sqrt{40}}$ ce qui donne $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}054$

$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}17 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}17 \times 0{,}83}}{\sqrt{40}}$ ce qui donne $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}286$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}054 ; 0{,}286]$.

2°) Le test sur 40 personnes donne une fréquence de panne de $\frac{11}{40} = 0{,}275$.

$0{,}275 \in [0{,}054 ; 0{,}286]$

On en déduit que l'affirmation du constructeur n'est pas rejetée.

3°) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec $p = 0{,}17$.

Pour $n = 200$ on obtient :

$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}17 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}17 \times 0{,}83}}{\sqrt{200}}$ ce qui donne $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}118$

$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}17 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}17 \times 0{,}83}}{\sqrt{200}}$ ce qui donne $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}222$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}118 ; 0{,}222]$.

Sachant que $0{,}222 \times 200 = 44{,}4$ on peut dire que :
si le nombre N de pannes décelées est supérieur ou égal à 45, l'affirmation du constructeur sera rejetée.
(C'est-à-dire que l'on pourra penser que la probabilité de panne annoncée à 0,17 est inférieure à la réalité).

Sachant que $0{,}118 \times 200 = 23{,}6$ on peut dire que :
si le nombre N de pannes décelées est inférieur ou égal à 23, l'affirmation du constructeur sera rejetée.
(C'est-à-dire que l'on pourra penser que la probabilité de panne annoncée à 0,17 est supérieure à la réalité).

Exercice 24

La mutuelle affirme que 22% de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail, c'est-à-dire que la probabilité qu'un adhérent ait dépassé 20 journées d'absence au travail est $p = 0{,}22$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ avec $p = 0{,}22$.

L'organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle, on a donc $n = 200$

on obtient :

$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}22 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}22 \times 0{,}78}}{\sqrt{200}}$ ce qui donne $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}162$

$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}22 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}22 \times 0{,}78}}{\sqrt{200}}$ ce qui donne $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}278$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}162 \,;\, 0{,}278]$.

Le résultat de l'enquête donne une proportion de $\frac{28}{200} = 0{,}14$

Ce résultat ne se trouve pas dans l'intervalle de fluctuation asymptotique.

On peut conclure que l'affirmation de la mutuelle n'est pas exacte (avec une probabilité de 0,95).

Exercice 27

1°) La proportion de femmes dans la population générale est d'environ 51,6 % .

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $\left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

avec $p = 0{,}516$.

Pour $n = 1000$ on obtient :

$p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}516 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}516 \times 0{,}484}}{\sqrt{1000}}$ ce qui donne $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}485$

$p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}516 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}516 \times 0{,}484}}{\sqrt{1000}}$ ce qui donne $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}547$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}485\ ;\ 0{,}547]$.

La fréquence de femmes dans l'échantillon est $\dfrac{490}{1000} = 0{,}49$.

$0{,}49 \in [0{,}485\ ;\ 0{,}547]$

On peut considérer que l'échantillon est conforme à la répartition hommes-femmes dans la population générale.

2°) La proportion des moins de 25 ans dans la population générale est d'environ 30,8 % .

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $\left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

avec $p = 0{,}308$.

Pour $n = 1000$ on obtient :

$p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}308 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}308 \times 0{,}692}}{\sqrt{1000}}$ ce qui donne $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}279$

$p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}308 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}308 \times 0{,}692}}{\sqrt{1000}}$ ce qui donne $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}337$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}279\ ;\ 0{,}337]$.

La fréquence des moins de 25 ans dans l'échantillon est $\dfrac{312}{1000} = 0{,}312$.

$0{,}312 \in [0{,}279\ ;\ 0{,}337]$

On peut considérer que l'échantillon est conforme à la répartition des moins de 25 ans dans la population générale.

3°) La fréquence des personnes de l'échantillon intéressées par l'émission de télévision est $f = \dfrac{258}{1000} = 0{,}258$

$\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance à 95% de la proportion p.

On a $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}258 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$ donc $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}226$

et $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}258 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$ donc $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}290$

La proportion p de personnes intéressées par l'émission de télévision dans la population générale est dans l'intervalle $[0{,}226\ ;\ 0{,}290]$ au niveau de confiance 0,95 .

Exercice 28

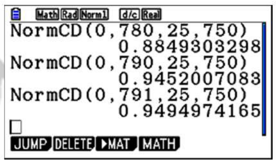
1°) a) Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n'y a pas plus de 3% de cadenas défectueux dans sa production.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est
$\left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ avec $p = 0{,}03$.
Le responsable du magasin prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas.
On a donc $n = 500$ et on obtient :
$p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}03 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}03 \times 0{,}97}}{\sqrt{500}}$ ce qui donne $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}015$
$p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}03 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}03 \times 0{,}97}}{\sqrt{500}}$ ce qui donne $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}045$
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}015 \,;\, 0{,}045]$.
La fréquence de cadenas défectueux dans l'échantillon est $\dfrac{19}{500} = 0{,}038$ et $0{,}038 \in [0{,}015 \,;\, 0{,}045]$

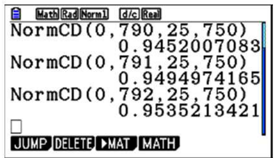
Le contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux.

b) La fréquence de cadenas premier prix défectueux dans l'échantillon est $f = \dfrac{39}{500} = 0{,}078$.
$\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance à 95% de la proportion p.
On a $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}078 - \dfrac{1}{\sqrt{500}}$ donc $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}033$
et $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}078 + \dfrac{1}{\sqrt{500}}$ donc $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}123$
La proportion p de de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix est dans l'intervalle $[0{,}033 \,;\, 0{,}123]$ au niveau de confiance 0,95 .

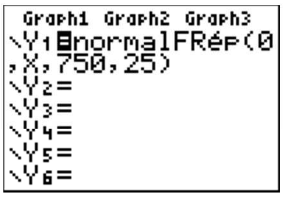
2°) a) La calculatrice permet d'obtenir $P(725 \leqslant X \leqslant 775) \approx 0{,}68$
NB : on pouvait aussi utiliser un résultat du cours car
$725 = 750 - 25 = \mu - \sigma$ et $775 = 750 + 25 = \mu + \sigma$
or on sait que $p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68$ à 10^{-2} près.

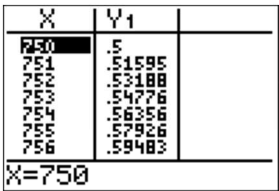
b) Il s'agit de trouver le plus petit nombre n pour lequel
$p(0 \leqslant X \leqslant n) \geqslant 0{,}95$
On peut procéder par essais successifs :

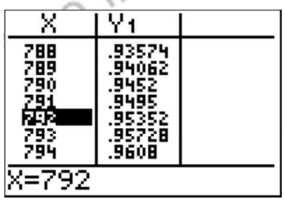




ou en faisant un tableau de valeurs :







On obtient $n = 792$.