INTÉGRALES

I Définition

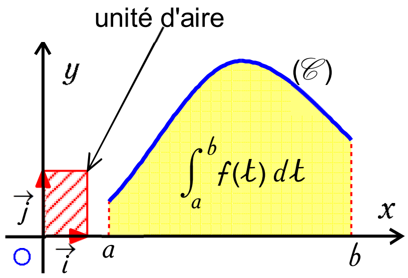
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$

l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$,

c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$



Remarques

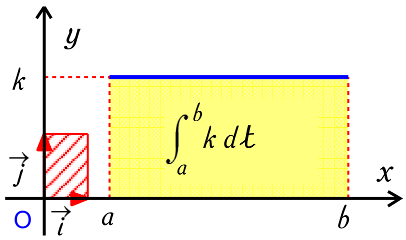
- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,dt$ se lit : "intégrale de a à b de $f(t)$ dt".
- La variable t est appelée variable "muette", car elle n'intervient pas dans le résultat final.
  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$.
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe Ox et 3 cm sur l'axe Oy, alors l'unité d'aire est 6 cm^2.

Exemple

Si f est une fonction constante positive k, alors

$\int_a^b f(t)\,dt$ correspond à l'aire d'un rectangle.

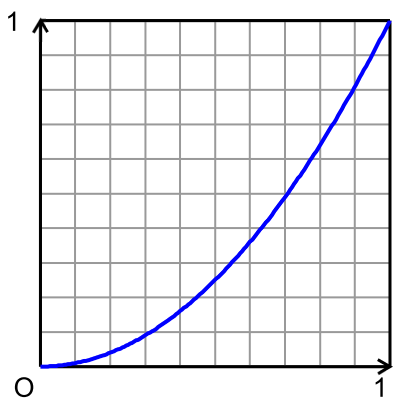
On a $\int_a^b k\,dt = k(b - a)$.



Exercice 01

On considère l'arc de la parabole (P) d'équation $y = x^2$ représenté ci-contre, dans un repère orthonormé, sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
L'unité étant divisée en 10, un petit carreau de la graduation ci-contre mesure un centième d'unité d'aire.
Compter le nombre n_1 de petits carreaux se trouvant entièrement au-dessous de la courbe.
Compter le nombre n_2 de petits carreaux qui sont traversés par la courbe.
On estime que l'aire sous la courbe peut être évaluée par le nombre $\left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) \times 0{,}01$

Donner alors une évaluation de $\int_0^1 x^2\,dx$.



Déterminer une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
Calculer F(1) – F(0) et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 02

On considère la fonction affine f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

1°) Représenter graphiquement f. Déterminer $\int_{-2}^{4} f(t)\,dt$.

2°) Déterminer une primitive F de f sur IR. Justifier que $\int_{-2}^{4} f(t)\,dt = F(4) - F(-2)$

II Intégrale et primitives

Exercice 03

Soit f définie sur IR par : $f(x) = x + 2$.

1°) Tracer la représentation graphique D de f en utilisant un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit x un réel positif. Placer sur le dessin le point M d'abscisse x sur D ; le point M′ d'abscisse x sur l'axe Ox et le point A d'abscisse 0 sur D.
Calculer en fonction de x l'aire du trapèze OAMM′.
En déduire que la fonction F définie par $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f.

Théorème

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$, la fonction F définie sur $[a ; b]$ par :

$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a ; b]$.

F ainsi définie est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Remarques

- On a alors $F(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$
- Si G est une autre primitive de f sur $[a ; b]$, alors $G = F + k$ avec $k \in R$;
  donc $G(a) = F(a) + k$ et comme F s'annule en a, on en déduit que $G(a) = k$.
  Par conséquent $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) = G(b) - k = G(b) - G(a)$

Propriété

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et si F est une primitive de f sur $[a ; b]$, alors $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Remarques

- La relation $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ est valable pour n'importe quelle primitive F de f.
- On note aussi $F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_{a}^{b}$ qui se lit : "F(t) pris entre a et b".

Exemples

$$\int_{1}^{3} (2x + 5)\,dx = \Big[\ x^2 + 5x\ \Big]_{1}^{3} = (3^2 + 5 \times 3) - (1^2 + 5 \times 1) = (9 + 15) - (1 + 5) = 24 - 6 = 18$$

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \ln(x)\ \Big]_{2}^{5} = \ln(5) - \ln(2)$$

Remarque

La relation $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, pourra être étendue à une fonction f continue de signe quelconque.
Elle pourra aussi être utilisée avec des bornes qui ne sont pas dans l'ordre croissant.

Exemple

$$\int_4^2 \left(t^3 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{t}\right]_4^2 = \left(\frac{1}{4} \times 2^4 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} \times 4^4 + \frac{1}{4}\right) = 4 + \frac{1}{2} - 64 - \frac{1}{4} = -60 + \frac{1}{4} = -\frac{239}{4}$$

Exercice 04

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^3 (x+4)\,dx \quad ; \quad \int_2^0 (x^2+x)\,dx \quad ; \quad \int_0^{-2} 4t^3\,dt \quad ; \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 e^x\,dx$$

Exercice 05

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx \quad ; \quad \int_2^{-1} 3x^3\,dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 (2t^2-1)\,dt \quad ; \quad \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \quad ; \quad \int_1^3 \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$$

Exercice 06

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^1 e^{2x}\,dx \quad ; \quad \int_5^{10} e^{-0,2x+1}\,dx \quad ; \quad \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{2}e^x\right) dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 x\,e^{x^2+1}\,dx$$

Exercice 07

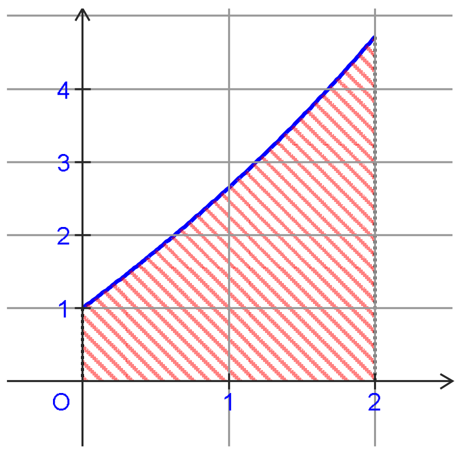
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$.

1°) Justifier que la fonction f est positive.

2°) Déterminer une primitive de f sur $[0\,;\,2]$.

3°) On donne ci-contre, la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de f.
Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire hachurée sur le dessin.
Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près

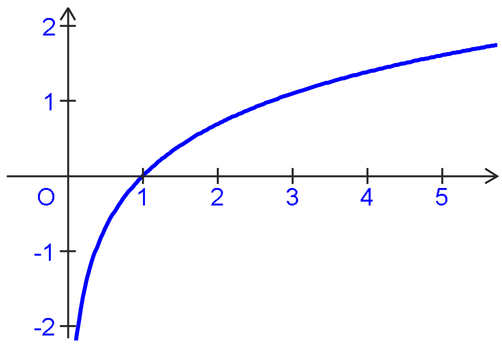


Exercice 08

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1cm.
Représenter graphiquement f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.
Calculer l'aire de la portion fermée du plan située entre la courbe et l'axe Ox.

Exercice 09

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.
1°) Soit F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$
Justifier que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2°) On considère la portion du plan $\mathscr{A}$ correspondant à l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant \ln(x) \end{cases}$
a) Hachurer cette portion de plan $\mathscr{A}$ sur le dessin.
b) Calculer l'aire de $\mathscr{A}$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.

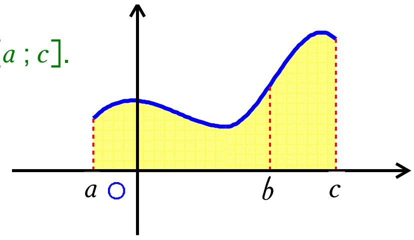


III Propriétés - Valeur moyenne d'une fonction

Remarque

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;c]$ et soit $b \in [a\,;c]$.
Par addition des aires on peut remarquer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt \qquad \text{(relation de Chasles)}$$



Propriétés

f et g étant deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b et c étant trois éléments de I et λ un réel, on a :

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad ; \qquad \int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt \qquad \text{(Relation de Chasles)}$$

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \qquad ; \qquad \int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt$$

Exercice 10

1°) Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

2°) a) Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ a pour primitive sur $]-1\,;+\infty[$ la fonction $x \mapsto \ell n(x+1)$

b) Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x+1}\,dx$

3°) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

4°) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

Exercice 11

1°) Justifier que pour tout réel x : $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

2°) Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

3°) a) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur IR par $h(x) = \ell n(1+e^x)$

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

4°) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

Propriétés

Soient f et g des fonctions continues sur $[a\,;b]$. ($a \leqslant b$)

Si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Remarque

Les propriétés ci-dessus ne sont valables que lorsque $a \leqslant b$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{x^2}$. On ne demande pas de calculer les intégrales.

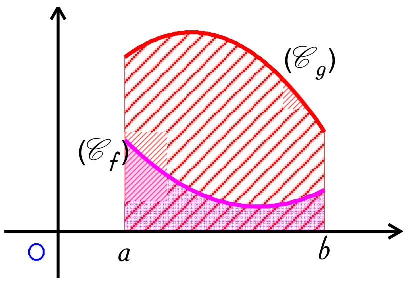
1°) Montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \geqslant 0$

2°) Montrer que $2 \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqslant 2e$

Remarque

Soient f et g sont deux fonctions continues et positives telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$.

L'inégalité $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$ s'interprète de façon immédiate en termes d'aires : l'aire sous la courbe de f est inférieure à l'aire sous la courbe de g.

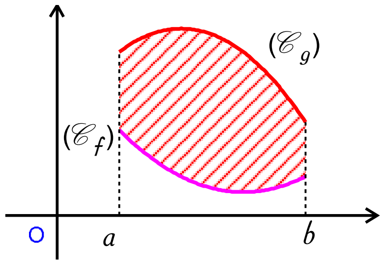


Propriété

Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $[a\,;b]$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors l'aire comprise entre les deux courbes est :

$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ c'est-à-dire $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

C'est l'aire de l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$



Exercice 13

Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe ($\mathscr{C}$) représentant la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^2 + 2$
Représenter, sur le même dessin, la droite D d'équation $y = 2x + 2$.
Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre ($\mathscr{C}$), D et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 14

Dans un repère orthonormé déterminer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 1$, la droite D d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 5$ et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Faire un dessin.

Exercice 15

Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Tracer sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé.

Représenter sur le même dessin la droite D d'équation $y = -x + 4$.
Calculer l'aire de la portion de plan fermée comprise entre ($\mathscr{C}$) et D. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Calculer A $= \int_1^e f(x)\,dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

Déterminer la hauteur h du rectangle limité par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ et l'axe Ox et ayant pour aire A. On dit que h est la valeur moyenne de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1\,;e]$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a \neq b)$

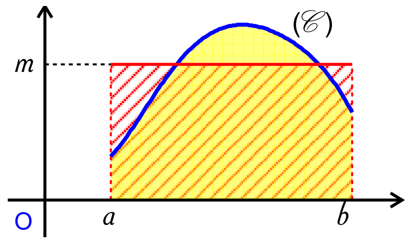
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ le nombre réel : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a \neq b)$.
Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
La valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ est le nombre réel m tel que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = m\,(b-a)$$

La valeur moyenne est donc le nombre réel m pour lequel l'aire du rectangle de hauteur m est égale à l'aire sous la courbe de f.



Exercice 17

Déterminer la valeur moyenne de chacune des fonctions sur l'intervalle considéré.
$f(x) = x^2$ sur $[1\,;\,2]$; $g(x) = -0{,}0032x^3 + 0{,}06x^2 + 5$ sur $[0\,;\,20]$; $h(x) = e^x$ sur $[-1\,;\,1]$
Dans chacun des cas faire apparaître cette valeur moyenne sur un graphique créé avec une calculatrice ou un ordinateur.

Exercice 18

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\,\ell n(x^2 - 2x + 3)$

1°) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.

3°) Donner le tableau de variation de f sur $[0\,;\,3]$.

4°) Donner, sans calculer cette intégrale, un encadrement de $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

5°) En déduire que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ est comprise entre 2 et 6.

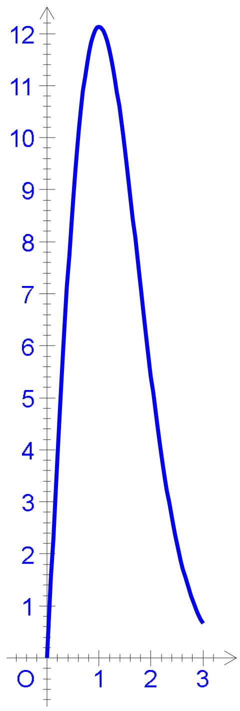
Exercice 19

Une société d'achats en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle «flash» qu'elle a organisée sur Internet.

Cette vente, d'une durée annoncée de trois minutes, a provoqué sur son site un flux financier que l'on peut supposer continu et dont la vitesse instantanée a été variable en fonction du temps.

On a pu modéliser cette vitesse pendant les trois minutes de l'ouverture du site par la fonction f définie par $f(t) = 20t\,exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

où t est le temps, exprimé en minutes ($t \in [0\,;\,3]$) et $f(t)$ la vitesse instantanée de ce flux, exprimée en milliers d'euros par minute.
La représentation graphique de f est donnée ci-contre.



1°) Déterminer une primitive F de la fonction f.

2°) En déduire l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 3$, exprimée en unités d'aire.

3°) Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,3]$?

4°) Quelle a été la somme totale transférée à la fin des trois minutes (à un euro près) ?

Exercice 20

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de P fabriquées. On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.
La fonction coût marginal, C′, est la dérivée de la fonction C.

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ on a : $C'(x) = \dfrac{10\,e^x}{e^x + 4}$.

De plus on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1°) a) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 10\,\ell n\,(e^x + 4)$
Justifier que F est une primitive de C′ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $C(x) = 10\,\ell n\,(e^x + 4) - 10\,\ell n\,(5)$.

c) Quel est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ?
On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près.

2°) On appelle $C_M(x)$ le coût moyen de fabrication défini, pour tout x strictement positif, par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

a) Montrer que $C_M(x)$ est la valeur moyenne de la fonction coût marginal sur l'intervalle $[0\,;\,x]$.

b) Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

c) Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de $C_M(5)$; de $C_M(10)$ et de $C_M(100)$.

Exercice 21

Partie 1

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,9]$ par $f(x) = \dfrac{10}{1+x} - 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{2}$

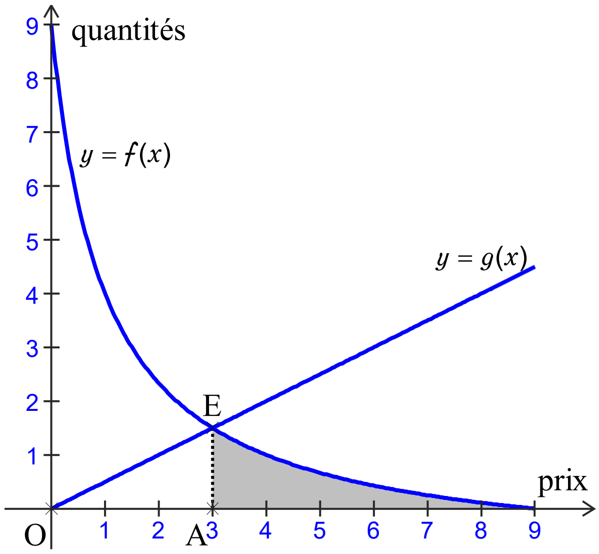
1°) Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

2°) a) Soit F définie sur $[0\,;\,9]$ par $F(x) = 10\,\ell n(1 + x) - x$. Justifier que F est une primitive de f.

b) Calculer $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,dx$; on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie 2

Un produit conditionné en boîte est mis sur le marché.
On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.
On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$ en centaines de boîtes.
Sur le graphique ci-contre, sont tracées dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g.



1°) On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.

a) Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 € la boîte ?

b) Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre.
Donner le prix d'équilibre en euros et le nombre de boîtes correspondant.

2°) a) D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (une unité d'aire correspond à un millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.

b) Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leqslant x \leqslant 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.