LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 01

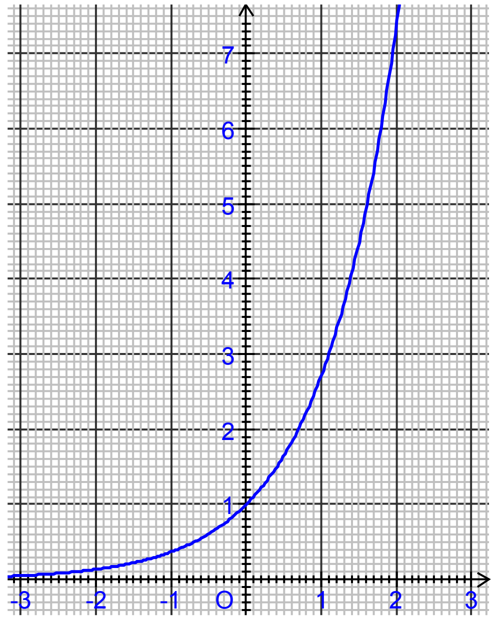
1°) En utilisant la courbe de la fonction exponentielle dessinée ci-contre, déterminer un encadrement au dixième du réel a tel que $e^a = 7$

2°) En faisant avec la calculatrice un tableau de valeurs de la fonction exponentielle, déterminer un encadrement de a au centième.

3°) En utilisant la touche ℓn de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $\ell n(7)$ et vérifier que la valeur obtenue correspond à l'encadrement donné pour a dans la question précédente.

4°) Déterminer avec la calculatrice la valeur de $e^{\ell n(7)}$
Que peut-on dire du nombre $\ell n(7)$?

5°) Déterminer avec la calculatrice les valeurs de :
$e^{\ell n(3)}$; $e^{\ell n(0,1)}$; $e^{\ell n(1,25)}$; $e^{\ell n(12,41)}$
Que peut-on dire des nombres :
$\ell n(3)$; $\ell n(0,1)$; $\ell n(1,25)$; $\ell n(12,41)$



Remarque

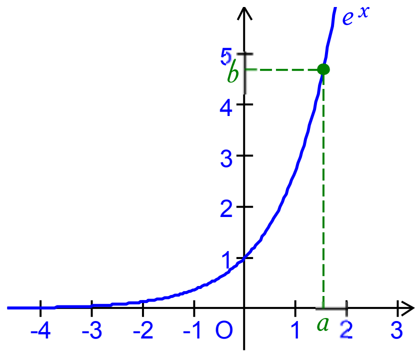
En utilisant la courbe représentative de la fonction exponentielle, on peut remarquer que :

pour tout réel b dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$
il existe un et un seul réel a dans IR tel que $e^a = b$

Ce résultat peut se justifier avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Le nombre réel a sera noté $\ell n(b)$ et appelé logarithme népérien de b.

(voir animation)



Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre l'unique réel y tel que $e^y = x$.
La fonction logarithme népérien est notée ℓn
On notera $\ell n : \ ]0 ; +\infty[\to$ IR
$x \mapsto \ell n(x)$

Remarques

- La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle (de la même façon que la fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$).
Comme on sait que $e^0 = 1$ on a donc $\ell n(1) = 0$; de même $e^1 = e$ donc $\ell n(e) = 1$.
- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il arrive que l'on supprime les parenthèses et on note ainsi $\ell n x$ à la place de $\ell n(x)$.

Propriétés

- $\ell n(1) = 0$ et $\ell n(e) = 1$
- Pour tout réel x strictement positif , on a $e^{\ell n(x)} = x$
- Pour tout réel x, on a $\ell n(e^x) = x$
- $\begin{cases} x \in \ ]0 ; +\infty[\\ y = \ell n(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \text{IR} \\ e^y = x \end{cases}$

Exercice 02

Résoudre dans IR les équations :

$\ell n\, x = 4$; $\ell n\, x = -2$; $3\,\ell n\, x = 2$; $\ell n(x) + \ell n(5) - \pi = 0$

Exercice 03

Déterminer $e^{\ell n\, 2}$; $e^{\ell n\, 3}$; $e^{\ell n\, 6}$

En utilisant la propriété $e^{a+b} = e^a \times e^b$ déterminer la valeur de $e^{\ell n(2) + \ell n(3)}$

En déduire que $\ell n(2) + \ell n(3) = \ell n(6)$

Justifier de même que $\ell n(4) + \ell n(5) = \ell n(20)$

Exercice 04

Déterminer $e^{\ell n\, 7}$; $e^{\ell n\, 9}$; $e^{\ell n \frac{7}{9}}$ en déduire que $\ell n(7) - \ell n(9) = \ell n\left(\frac{7}{9}\right)$

Exercice 05

Déterminer $e^{\ell n(\sqrt{3}) + \ell n(\sqrt{3})}$ et en déduire que $\ell n(\sqrt{3}) + \ell n(\sqrt{3}) = \ell n(3)$, puis que $\ell n(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ell n(3)$

De même justifier que $\ell n(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\ell n(5)$

Remarque

On sait que la fonction exponentielle transforme une somme en produit, on peut alors penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, va transformer un produit en somme.

Propriétés

- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
  $\ell n(a \times b) = \ell n(a) + \ell n(b)$; $\ell n\left(\frac{a}{b}\right) = \ell n(a) - \ell n(b)$; $\ell n\left(\frac{1}{a}\right) = -\ell n(a)$; $\ell n(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ell n(a)$
- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n réels strictement positifs ($n \in \mathbb{N}^*$) , alors
  $\ell n(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ell n(a_1) + \ell n(a_2) + \ldots + \ell n(a_n)$
  (Le logarithme népérien d'un produit de n nombres est égal à la somme des logarithmes népériens de ces nombres)
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ell n(a^n) = n\,\ell n(a)$

Exercice 06

Simplifier les expressions suivantes :

$\ell n(6) - \ell n(2)$; $\ell n\,(2) + \ell n\left(\frac{1}{2}\right)$; $\ell n(3) - \ell n(9)$; $\ell n(2) + \ell n(4) - \ell n(8)$; $\frac{1}{4}\ell n(81)$

Exercice 07

Simplifier les expressions suivantes :

$\ell n\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,\ell n(\sqrt{3})$; $\ell n(2 + \sqrt{3}) + \ell n(2 - \sqrt{3})$; $\ell n\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right) - \ell n(\sqrt{3} - 1)$

Exercice 08

Donner, en fonction de $\ell n\, 2$ et $\ell n\, 5$ les valeurs de :

$\ell n 10$; $\ell n 25$; $\ell n 16$; $\ell n 400$; $\ell n \frac{2}{25}$; $\ell n \frac{1}{100}$

$\ell n \frac{5}{8}$; $\ell n 0{,}4$; $\ell n(\sqrt{5})$; $\ell n(2\sqrt{2})$; $\ell n(5\sqrt{10})$; $\ell n \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Exercice 09

Écrire plus simplement :

$\ell n(14) - \ell n(7)$; $\ell n\left(\frac{5}{2}\right) + \ell n\left(\frac{2}{5}\right)$; $\frac{\ell n\, 100}{\ell n\, 10}$; $\ell n(10\,000) + \ell n(0{,}001)$; $\ell n\left(\frac{1}{2}\right) + \ell n\left(\frac{2}{3}\right) + \ell n\left(\frac{3}{4}\right) + \ell n\left(\frac{4}{5}\right)$

Exercice 10

a et b étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ell n\, a$ et $\ell n\, b$ les valeurs de :

$\ell n \dfrac{a}{b^2}$; $\ell n (a^3 \times b^5)$; $\ell n (ab^3)$; $\ell n \dfrac{b^2}{a^3}$; $\ell n \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\right]$; $\dfrac{\ell n (a)}{\ell n (ab^2)}$; $\dfrac{\ell n (ab^4)}{\ell n (b)}$

Exercice 11

Justifier les égalités suivantes :

$e^{2\ell n 5} + e^{3 \ell n 2} = 33$; $e^{5 \ell n 2} \times e^{7 \ell n 4} = 2^{19}$; $\ell n\left(\dfrac{1}{1+e^{-2}}\right) - \ell n\left(\dfrac{1}{1+e^{2}}\right) = 2$

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x\, e^{-x}$

Justifier que : $f(\ell n 5) = \dfrac{1}{5} \ell n 5$; $f(\ell n 4) = \ell n \sqrt{2}$; $f'(\ell n 5) = \dfrac{1 - \ell n 5}{5}$; $f'(\ell n 4) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\ell n 2}{2}$

Exercice 13

Résoudre dans IR les équations :

$3 - 5e^x = 0$; $2e^x + 1 = 0$; $1 + \ell n x = 0$; $2 + 3\, \ell n x = 0$

Exercice 14

Résoudre dans IR l'équation $\ell n (x) + \ell n (x-1) = \ell n 6$

Propriété

La fonction ℓn est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a $(\ell n\, x)' = \dfrac{1}{x}$

Remarque

Pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$ on a $e^{\ell n\, x} = x$. En posant $u(x) = \ell n\, x$ on peut écrire $e^{u(x)} = x$
En admettant que la fonction ℓn est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on obtient en dérivant : $u'(x) \times e^{u(x)} = 1$
c'est-à-dire $u'(x) = \dfrac{1}{e^{u(x)}}$ donc $(\ell n\, x)' = \dfrac{1}{x}$

Exercice 15

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = x + 2\, \ell n x$; $g(x) = 3 + x\, \ell n x$; $h(x) = (x-1)\, \ell n x$; $j(x) = \dfrac{\ell n x}{x}$

Propriétés

- La fonction ℓn est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$
- $x > 1 \iff \ell n x > 0$ et $0 < x < 1 \iff \ell n x < 0$

Exercice 16

Résoudre dans IR les inéquations :

$1 - 3\, \ell n x < 0$; $\ell n (x) + \ell n (2) \geqslant \ell n (3x - 6)$; $e^x - 2 > 0$; $5 - 3e^{-x} \leqslant 3$

Exercice 17

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \ell n (x) - (x-1)$

1°) Calculer la dérivée de h et étudier son signe.

2°) En déduire que h a un maximum que l'on déterminera.

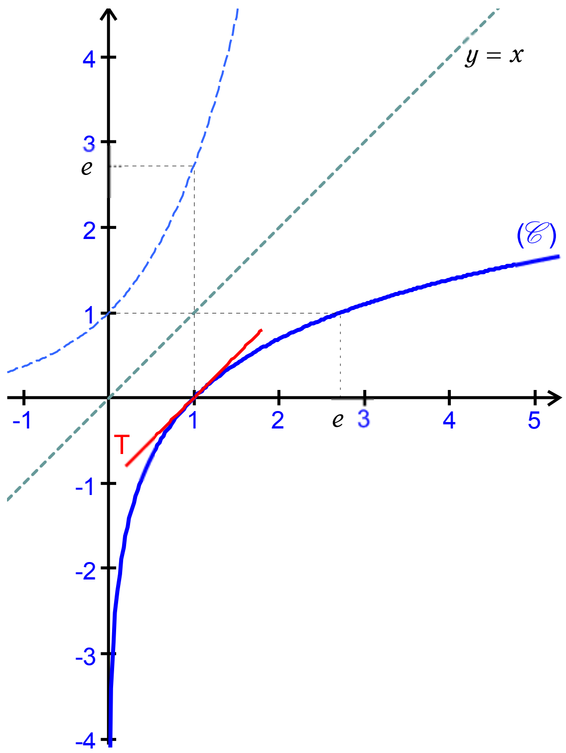
3°) Justifier que pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$ on a $\ell n x \leqslant x - 1$

Remarque

On sait que $\ell n 1 = 0$.
La courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction logarithme népérien passe donc par le point de coordonnées (1 ; 0)
On sait que $(\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$.
Le nombre dérivé en 1 de la fonction ℓn est $\dfrac{1}{1} = 1$.
La courbe $(\mathscr{C})$ a donc pour tangente au point d'abscisse 1 la droite T de coefficient directeur 1.
Son équation est : $y = x - 1$.
On peut justifier que $(\mathscr{C})$ se situe au-dessous de sa tangente T (voir exercice 17)

Courbe représentative

On obtient ci-contre la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction logarithme népérien et sa tangente T au point d'abscisse 1.
Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque

En utilisant une calculatrice on obtient les valeurs suivantes (au centième près) :

x	0,01	0,1	0,2	0,5	1	2	3	5	10
$\ell n x$	–4,61	–2,30	–1,61	–0,69	0	0,69	1,10	1,61	2,30

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ell n x}{x}$

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2°) Justifier que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\ell n 2$ et $f(16) = \dfrac{\ell n 2}{4}$

3°) Donner le tableau des variations de f sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 16\right]$.

4°) Tracer la courbe représentative de f pour $x \in \left[\dfrac{1}{2} ; 16\right]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\,\ell n x}$

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens de variation de f.
2°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f pour $x \in [1{,}2 ; 10]$.
3°) Donner l'équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse e et tracer cette tangente.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = [\ell n(x)]^2 + \ell n(x) - 2$

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens de variation de f.

2°) Justifier que l'équation $X^2 + X - 2 = 0$ a deux solutions X_1 et X_2 que l'on déterminera.
En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = e^{-2}$ et $x_2 = e$

3°) Donner le tableau des variations de f sur l'intervalle $[e^{-2} ; e]$.

4°) Tracer la courbe de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm, pour $x \in [e^{-2} ; e]$.

5°) Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 et tracer cette tangente sur le dessin.

Remarque

Une équation de la forme $x^n = k$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, avec $n \in]0\,;+\infty[$ et $k \in]0\,;+\infty[$ peut se résoudre en utilisant la fonction logarithme népérien. En effet on peut écrire :

$$x^n = k \iff \ell n(x^n) = \ell n(k) \iff n\,\ell n(x) = \ell n(k) \iff \ell n(x) = \frac{\ell n(k)}{n} \iff x = e^{\frac{\ell n(k)}{n}}$$

On peut aussi résoudre en écrivant :

$$x^n = k \iff (x^n)^{\frac{1}{n}} = k^{\frac{1}{n}} \iff x = k^{\frac{1}{n}}$$

Les deux expressions $e^{\frac{\ell n(k)}{n}}$ et $k^{\frac{1}{n}}$, même si elles sont différentes, représentent le même nombre.

Exercice 21

Pour chacune des équations suivantes, on fera la résolution dans $]0\,;+\infty[$ en détaillant les calculs, puis on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution.

$x^{20} = 154$; $x^{48} = 17$; $(1 + x)^{10} = 31$; $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 1{,}05$

Exercice 22

Dans un pays donné, l'inflation pour trois années consécutives est de : 6% ; 16 % ; 5% .
Quel est le pourcentage d'augmentation totale des prix sur les 3 ans ?
On appelle t le pourcentage d'augmentation par année qui conduirait sur 3 ans à la même augmentation totale.

Justifier que : $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1{,}06 \times 1{,}16 \times 1{,}05$. En déduire la valeur de t (à 10^{-2} près). Conclure.

Exercice 23

La population mondiale a doublé entre 1960 et 2000. Quel a été le taux d'accroissement moyen annuel ?

Exercice 24

Lorsqu'un aliment est ingéré, la majorité des germes qu'il contient sont détruits par l'acidité de l'estomac. Mais si le nombre de bactéries est trop important, un certain nombre de ces bactéries peuvent parvenir aux intestins où elles se multiplient et libèrent des toxines irritantes provoquant une inflammation et une diarrhée. C'est une intoxication alimentaire.
Les salmonelles sont des bactéries susceptibles de se trouver dans la plupart des aliments que l'on consomme. En fonction de la température de conservation, le nombre de salmonelles dans un aliment augmente. Lorsque ce nombre est élevé, le risque d'intoxication est grand, l'aliment devient impropre à la consommation.
À l'origine, dans un certain aliment, le nombre de salmonelles par gramme est donné par une valeur de référence : $u_0 = 100$

1°) À une température T_1, le nombre de salmonelles présentes dans cet aliment augmente de 50% toutes les heures.
On note u_n le nombre de salmonelles par gramme au bout de n heures passées à cette température T_1.

a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b) Calculer le nombre de salmonelles par gramme au bout de 12 heures à la température T_1.

c) L'aliment est déclaré impropre à la consommation à partir du moment où $u_n = 100\,000$
Justifier que l'équation $u_n = 100\,000$ équivaut à $n = \frac{\ell n\, 1000}{\ell n\, 1{,}5}$
En déduire que l'aliment est impropre à la consommation au bout de 17 heures à la température T_1.

2°) a) Justifier que $x^{72} \leqslant 1000 \iff x \leqslant e^{\frac{\ell n\, 1\,000}{72}}$

b) À une température T_2, le nombre de salmonelles présentes dans cet aliment augmente de t% toutes les heures (t étant un entier). En utilisant le 2°)a) justifier que, pour pouvoir être consommé après 72 heures à la température T_2, on doit avoir $t \leqslant 10$, c'est-à-dire le nombre de bactéries ne doit pas augmenter de plus de 10% par heure.

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ell n(x)}{x}$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Soit g la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ell n(x)$
Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;+\infty[$.

2°) a) Montrer que, pour tout x de $[1\ ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;+\infty[$.

c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
Vérifier graphiquement le résultat sur une calculatrice.

3°) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $(\mathscr{C})$ et de D.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ell n(k)}{k}$.

b) Compléter le tableau suivant (valeurs approchées à 10^{-3} près) :

p	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\dfrac{\ell n(p)}{p}$										

En déduire qu'il existe au moins un entier p pour lequel la distance M_pN_p est inférieure à 0,1

c) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier q supérieur ou égal à 2 pour lequel la distance M_qN_q soit inférieure ou égale à 10^{-2}