Chapitre 3

FONCTION EXPONENTIELLE

CONSTRUCTION EXPÉRIMENTALE DE LA FONCTION $f : x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit $q > 0$ un réel strictement positif. (u_n) est la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = q^n$. (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1. Pour tous entiers naturels m et p, on a :

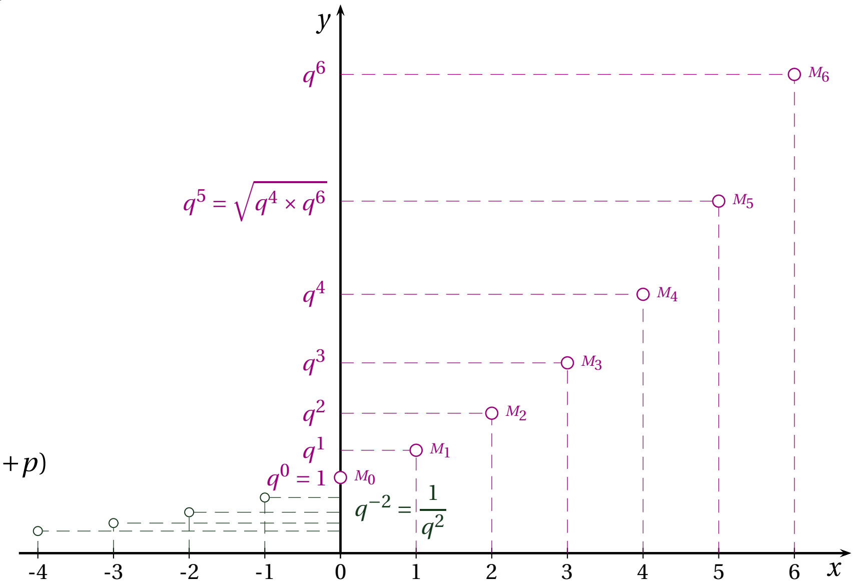
$$u_m \times u_p = q^m \times q^p = q^{m+p} = u_{m+p}$$

On considère le nuage de points M_i représentatif de la suite q^n.

ÉTAPE 1 : prolongement sur les négatifs.

Sachant que pour tout réel $q > 0$ et pour tout entier n, $q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$, on complète le graphique à l'aide de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{q}$.
On définit ainsi, une fonction f telle que pour tout entier relatif n, $f(n) = q^n$.
Pour tous entiers relatifs m et p,

$$f(m)\times f(p) = q^m \times q^p = q^{m+p} = f(m+p)$$



ÉTAPE 2 : prolongement par dichotomie.

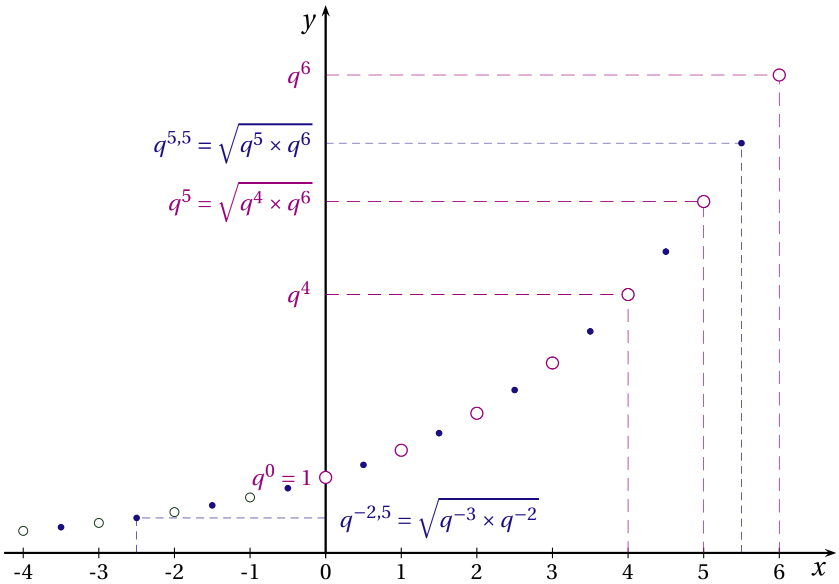
RAPPEL

Trois réels a, b et c sont, dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si, b est la moyenne géométrique de a et c (c'est à dire : $b = \sqrt{ac}$)

— Points d'abscisses $n + 0{,}5$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Au point d'abscisse $n + 0{,}5 = \dfrac{n+(n+1)}{2}$ on associe la moyenne géométrique des deux termes consécutifs :

$$f(n+0{,}5) = \sqrt{f(n)\times f(n+1)} = \sqrt{q^n \times q^{n+1}}$$



Pour tout entier relatif n :

$$f(n+0{,}5) = \sqrt{q^n \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1}{2}} = q^n \times q^{0{,}5} = f(n)\times f(0{,}5)$$

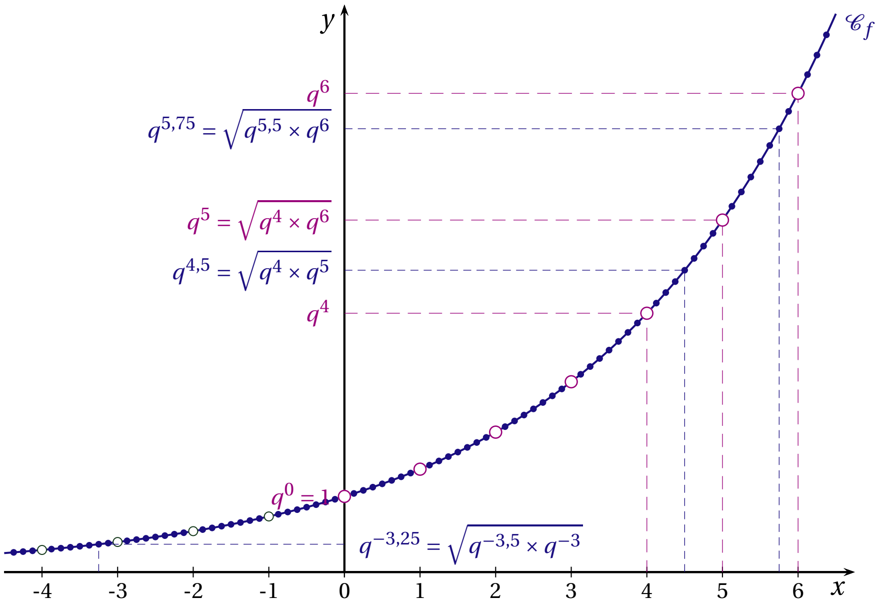
— On obtient de nouveaux points en réitérant ce processus :
Au point d'abscisse $n+0{,}25=\dfrac{n+(n+0{,}5)}{2}=\dfrac{2n+0{,}5}{2}$, on associe on associe le réel :

$$f(n+0{,}25)=\sqrt{q^n\times q^{n+0{,}5}}=q^{\frac{2n+0{,}5}{2}}=q^n\times q^{0{,}25}=f(n)\times f(0{,}25)$$

Au point d'abscisse $n+0{,}75=\dfrac{(n+0{,}5)+(n+1)}{2}=\dfrac{2n+1{,}5}{2}$ on associe on associe le réel :

$$f(n+0{,}75)=\sqrt{q^{n+0{,}5}\times q^{n+1}}=q^{\frac{2n+1{,}5}{2}}=q^n\times q^{0{,}75}=f(n)\times f(0{,}75)$$

Plus généralement soient $A\left(a;q^a\right)$ et $B\left(b;q^b\right)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, ce processus permet d'obtenir le point $M\left(\dfrac{a+b}{2};\sqrt{q^a\times q^b}\right)$ appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sqrt{q^a\times q^b}=q^{\frac{a+b}{2}}=q^{\frac{a}{2}}\times q^{\frac{b}{2}}=f\left(\frac{a}{2}\right)\times f\left(\frac{b}{2}\right)$$

La fonction f vérifie la relation $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

DES FONCTIONS « TRANSFORMANT LES SOMMES EN PRODUITS »

Soit f une fonction continue vérifiant pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} f(x)\neq 0 \\ f(x+y)=f(x)\times f(y)\end{cases}$$

1. En écrivant que pour tout réel x, $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)$, montrer que pour tout réel x, $f(x)>0$.
2. En remarquant que pour tout réel x, $f(x+0)=f(x)$, en déduire la valeur de $f(0)$.
3. Démontrer que pour tout réel x, $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$
4. On pose $f(1)=q$.
   a) Calculer $f(2)$ $f(3)$ et $f(0{,}5)$.
   b) Calculer $f(-1)$ et $f(-2)$.
5. Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=f(n)$ est une suite géométrique.

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q.
La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q.
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.
Une valeur approchée de l'image de $-5{,}3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence : 0.8 ∧ (- 5.3).

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits. Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

— $\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ q^{-x} = \dfrac{1}{q^x} \text{ et } q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}.}$

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^x > 0.}$

En effet, $q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ avec $q^x \neq 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}, \text{ et en particulier } q^{0,5} = \sqrt{q}}$

En effet, $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x > 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m,\ \left(q^x\right)^m = q^{mx}}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n > 0,\ q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

EXEMPLE

Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans.
Soit t % le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{t}{100}\right)^{15}=0{,}7 \quad & \iff \quad 1+\frac{t}{100}=0{,}7^{\frac{1}{15}} \\ & \iff \quad \frac{t}{100}=0{,}7^{\frac{1}{15}}-1 \\ \text{Soit} \quad & \quad \frac{t}{100}\approx -0{,}0235 \end{aligned}$$

Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % .

2 SENS DE VARIATION

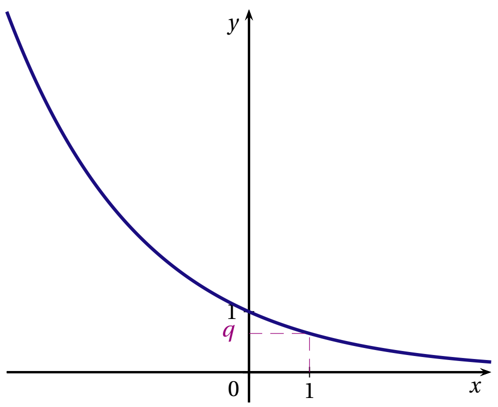
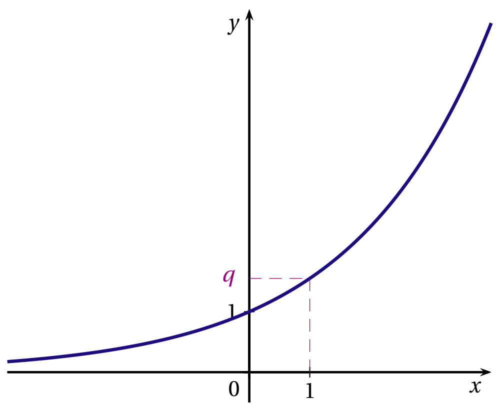
En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q>0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0<q<1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q=1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q>1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCE

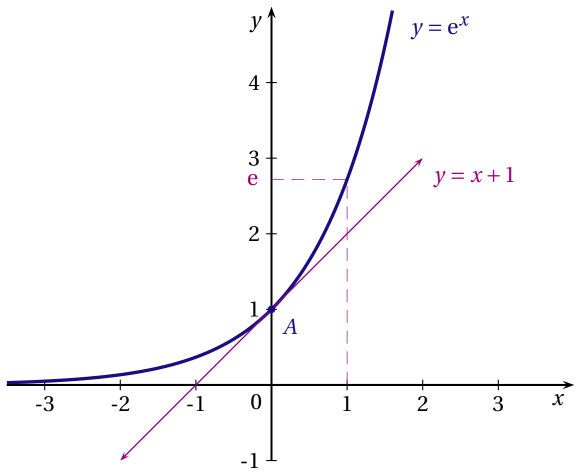
Si $q>0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a=q^b$ si, et seulement si, $a=b$.

3 PROPRIÉTÉS

<table>
<tr><td>$0<q<1$</td><td>$q>1$</td></tr>
<tr><td>La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</td><td>La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

II LA FONCTION EXPONENTIELLE

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.
Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.
Cette valeur particulière du réel q est notée e.
Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$.



1 DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note exp

$$\exp : x \longmapsto \mathrm{e}^x$$

CONSÉQUENCES

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
- $\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, $\quad \exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, $\quad \exp(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\quad \exp(0{,}5) = \mathrm{e}^{0{,}5} = \sqrt{\mathrm{e}}$
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$
- Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

  $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$, $\quad \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\quad \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, $\quad (\mathrm{e}^x)^m = \mathrm{e}^{mx}$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x,

$$\exp'(x) = \mathrm{e}^x$$

✻ DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$$

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{0+h} - \mathrm{e}^0}{h} = 1$ soit $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

Donc pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x$

3 VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✼ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

— Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < \mathrm{e}^x \leqslant 1$
— Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$
— Pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$ et $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$

EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{1-3x} < \mathrm{e}^{2x-3}$

$$\mathrm{e}^{1-3x} < \mathrm{e}^{2x+3} \iff 1-3x < 2x+3 \iff -5x < 2 \iff x > -\frac{2}{5}$$

   D'où l'ensemble solution $S = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 1$

$$\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant \mathrm{e}^0 \iff x^2-1 \geqslant 0$$

   D'où l'ensemble solution $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

✼ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = \mathrm{e}^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

LIMITES

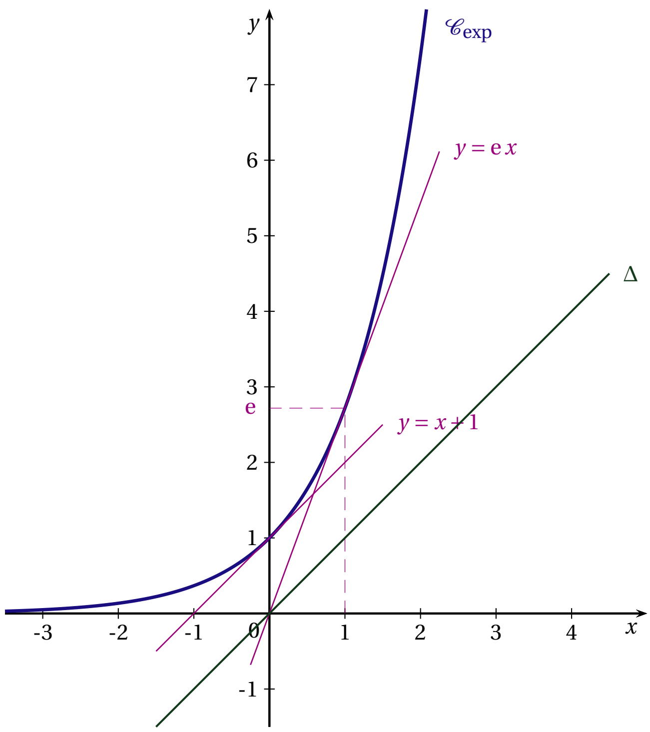
$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

$\mathrm{e} > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

$\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ d'où $\lim\limits_{n\to-\infty} \mathrm{e}^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = 0$. Par prolongement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x - 1) + \exp(1)$ Soit $y = \mathrm{e}\, x$
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.
   (*cf. exercice n° 7*)



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.
La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = \mathrm{e}^u$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = \mathrm{e}^u$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5\,\mathrm{e}^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = \mathrm{e}^u \times u'$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.
   Pour tout réel x, posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.

2 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

✻ DÉMONSTRATION

Soient $a < b$ deux réels de l'intervalle I

— Si u est décroissante sur I alors $u(b) < u(a)$
  Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc si $u(b) < u(a)$ alors $\mathrm{e}^{u(b)} < \mathrm{e}^{u(a)}$
  Par conséquent, si u est décroissante sur I alors la fonction e^u est décroissante sur I.

— Si u est croissante sur I alors $u(a) < u(b)$
  De la stricte croissance de la fonction exponentielle on en déduit que si $u(a) < u(b)$ alors $\mathrm{e}^{u(a)} < \mathrm{e}^{u(b)}$
  Donc si u est croissante sur I alors la fonction e^u est croissante sur I.

REMARQUE

Si u est dérivable sur I, alors la fonction $f = \mathrm{e}^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.
Or pour tout réel $x \in I$, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.