

Devoir Surveillé n°4A

Terminale ES/L

Premier Bilan

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Probabilité

5 points

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.

Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.

Par ailleurs :

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.

On considère les événements suivants :

- K : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl » ;
- L : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa » ;
- M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ;
- A : « la demande de prêt est acceptée ».

On rappelle que pour tout événement E , on note $P(E)$ sa probabilité et on désigne par \bar{E} son événement contraire.

Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.
4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Exercice 2. Les Suites

7 points

Une société propose un service d'abonnement pour jeux vidéo sur téléphone mobile.

Le 1^{er} janvier 2016, on compte 4 000 abonnés.

À partir de cette date, les dirigeants de la société ont constaté que d'un mois sur l'autre, 8 % des anciens joueurs se désabonnent mais que, par ailleurs, 8 000 nouvelles personnes s'abonnent.

1. Calculer le nombre d'abonnés à la date du 1^{er} février 2016.

Pour la suite de l'exercice, on modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre de milliers d'abonnés au bout de n mois après le 1^{er} janvier 2016.

La suite (u_n) est donc définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,92u_n + 8.$$

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables
 N est un nombre entier naturel
 U est un nombre réel

Traitement
 U prend la valeur 4
 N prend la valeur 0
 Tant que $U < 40$
 U prend la valeur $0,92 \times U + 8$
 N prend la valeur $N + 1$
 Fin Tant que

Sortie
 Afficher N

2. a. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Les valeurs de U seront arrondies au dixième.

Valeur de U	4
Valeur de N	0
Condition $U < 40$	vraie

2. b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 100$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,92 et calculer son premier terme v_0 .

3. b. Donner l'expression de v_n en fonction de n .

3. c. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. A l'aide de la calculatrice, déterminer la date (année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000.

Exercice 3. La fonction exponentielle**8 points****Partie A**Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par

$$f(x) = x + e^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x + 1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \mapsto x + \exp(-x + 1)$
2	derive ($f(x)$)
	$-\exp(-x + 1) + 1$
3	solve ($-\exp(-x + 1) + 1 > 0$)
	$[x > 1]$
4	derive ($-\exp(-x + 1) + 1$)
	$\exp(-x + 1)$

1. Étude des variations de la fonction f

- 1. a.** En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
 - 1. b.** En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.
- 2.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.

Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

- 1.** Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?
- 2.** Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
 - 2. a.** Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.
 - 2. b.** Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par :

$$g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$$
 - 2. c.** Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 10]$.
- 3. 3. a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0; 10]$.
- 3. b.** Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.
- 4.** En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

∞ Fin du devoir ∞

- Joyeux Noël et bonne année 2017 -