

Devoir Surveillé n°6

Terminale ES/L
Intégrales et primitives
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1.**4.5 points**

Soit g et G définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x} \text{ et } G(x) = (\ln x)^2$$

1. Démontrer que G est une primitive de g .
2. Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x = e$.
3. Montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 2.**15.5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe. Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0; 7]$.
2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.
3. La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x) dx$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

a. $[9; 17]$ **b.** $[18; 26]$ **c.** $[27; 35]$

Partie B

La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$ d'expression :

$$f(x) = 2xe^{-x+3}.$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

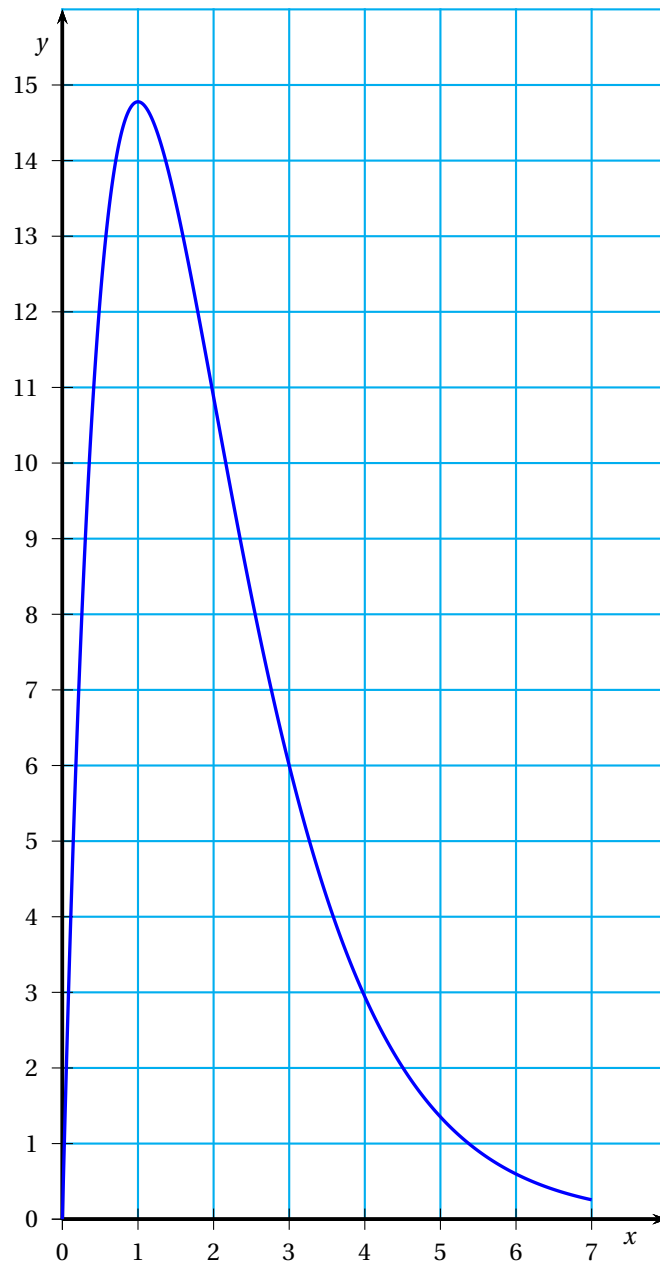
1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 7]$, $f'(x) = (-2x + 2)e^{-x+3}$.
2.
 2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.
 2. b. Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$.
3.
 3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
 3. b. On admet que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 7]$ par :

$$F(x) = (-2x - 2)e^{-x+3}.$$

4. a. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0; 7]$.
4. b. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C}_f .
5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).
 5. a. Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.
 5. b. L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.
Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

ANNEXE

N'est pas à rendre avec la copie



☞ **Fin du devoir** ☞