Devoir Surveillé n°2A

Terminale ES

Continuité et Convexité

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. Tableau de variations — 3 points

On donne les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.

x	-3		-1		0		1
Variations de f	-10	$\nearrow$	-5	$\searrow$	-20	$\nearrow$	4

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.

2. En déduire le signe de de f sur son intervalle de définition.

Exercice 2. Courbe de la fonction et équation — 10 points

Partie A (8 points)

On considère la fonction g définie sur $[1\,;\,11]$ par :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [1\,;\,11] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 + 27x + 1 \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est dérivable et que sa dérivée est définie sur $[1\,;\,11]$ par :

$$g'(x) = -x^2 + 6x + 27$$

2. Étudier le signe de la dérivée signe sur $[1\,;\,11]$.

3. En déduire les variations de g sur $[1\,;\,11]$. On fera clairement figurer les images par g des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de g'.

4. Approximation de la solution de l'équation $g(x) = 150$.

4. a. Montrer que l'équation $g(x) = 150$ admet une unique solution α sur l'intervalle de définition. Donner un intervalle comprenant α sur lequel la fonction est monotone.

4. b. Avec la calculatrice, donner une valeur une valeur approchée de α au centième.

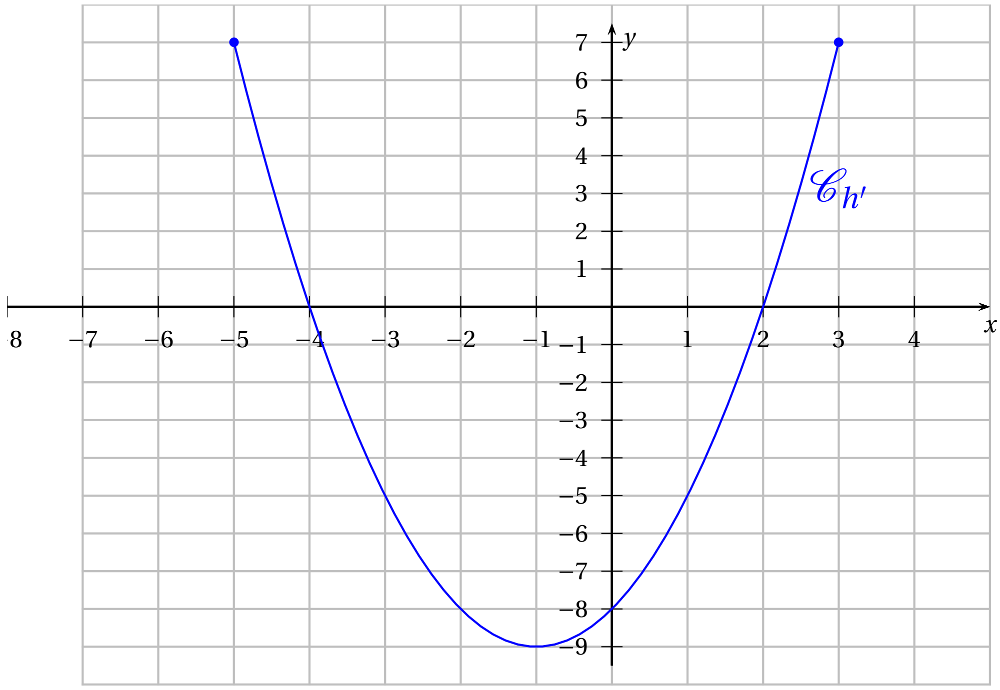
Partie B (2 points)

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 100 et 1 100. On suppose que toute la production est commercialisée. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[1\,;\,11]$ par la fonction g . En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

5. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

6. Calculer la production permettant d'obtenir un bénéfice supérieur ou égal à 150 000 euros.

Exercice 3. Courbe de la dérivée — 7 points



On a ci-dessus construit la courbe représentative de la fonction h', la dérivée d'une fonction h, définie et dérivable sur l'intervalle $[-5;3]$.

1. D'après le graphique, dresser le tableau de signe de $h'(x)$ et le tableau de variation de h sur l'intervalle $[-5;3]$.

2. La fonction h est en fait la fonction :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} [-5;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 1 \end{array} \right.$$

2. a. Déterminer la dérivée de h sur $[-5;3]$ puis étudier son signe sur cet intervalle.

2. b. En déduire les variations de h sur $[-5;3]$. On fera clairement figurer les images par h des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de h'.

2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question **(1.)**

3. Approximation de la solution de l'équation $h(x) = 5$.

3. a. Montrer que l'équation $h(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-5;3]$. Donner un intervalle comprenant α sur lequel la fonction est monotone.

3. b. Donner une valeur une valeur approchée de α au centième.

Fin du devoir

Bonus
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 = -2$ sur $\mathbb{R}$ et une approximation de ces dernières au centième.