

Devoir Surveillé n°6

Terminale ES/L
Intégrales et primitives
 Durée 1 heure - Coeff. 5
 Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Application du cours

4 points

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$.
Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.
- Calculer : $\int_0^2 f(x) dx$.
- En déduire la valeur moyenne de f sur $[0 ; 2]$.

Exercice 2.

5 points

Soit g et G définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x} \text{ et } G(x) = (\ln x)^2$$

- Démontrer que G est une primitive de g .
- Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x = e$.
- Montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

- Calculer la valeur moyenne de g sur $[1 ; e]$.

Exercice 3.

5 points

Soit h et H définies sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2} \text{ et } H(x) = x e^{1-x^2}$$

- Démontrer que H est une primitive de h .
- Calculer :

$$\int_0^1 h(x) dx$$

- En déduire que la valeur de :

$$\int_0^1 (2 - 4x^2) e^{1-x^2} dx$$

Bonus

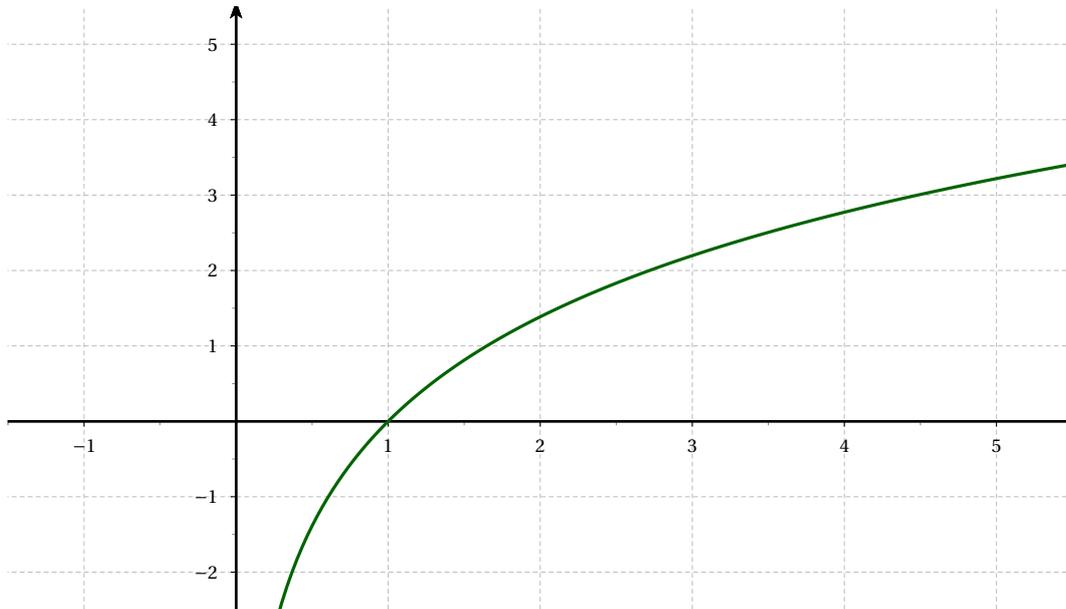
Calculer : $\int_0^1 (3 - 6t^2) e^{-t^2} dt$

Exercice 4. Un encadrement

6 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 \ln x$$



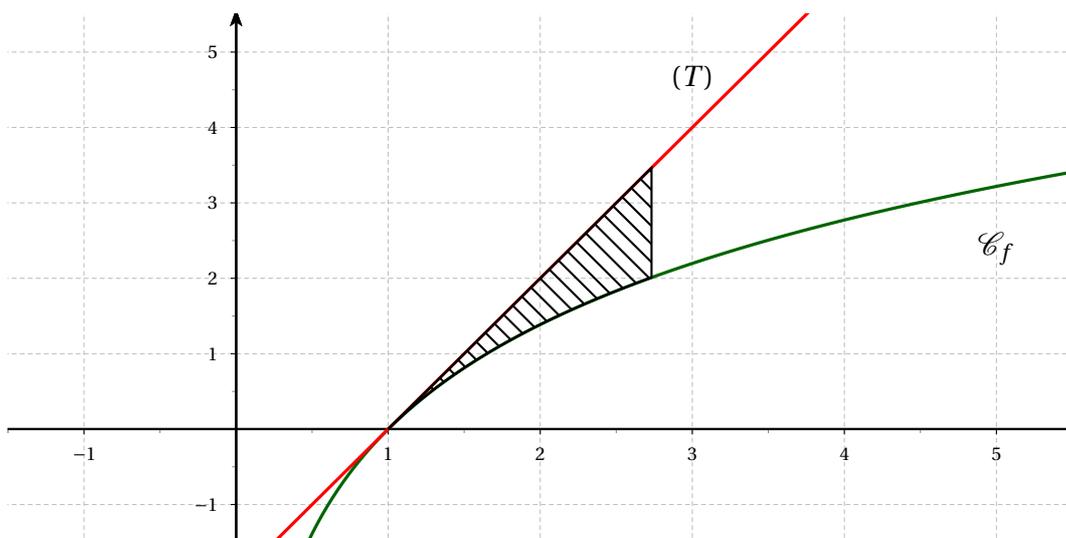
1. On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.
Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
2. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.
3. Montrer qu'une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est :

$$F(x) = 2x \ln x - 2x$$

4. Montrer que l'intégrale sur $[1; e]$ de f est :

$$\int_1^e 2 \ln x \, dx = 2$$

5. On a tracé ci-dessous (T) , la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1. La tangente (T) est d'équation $y = 2x - 2$.
On admet que (T) est située au dessus de \mathcal{C}_f . Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe \mathcal{C}_f , la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



Bonus

Retrouver par le calcul l'équation de (T) et montrer (T) est située au dessus de \mathcal{C}_f .

∞ Fin du devoir ∞