Devoir Surveillé n°3A Correction

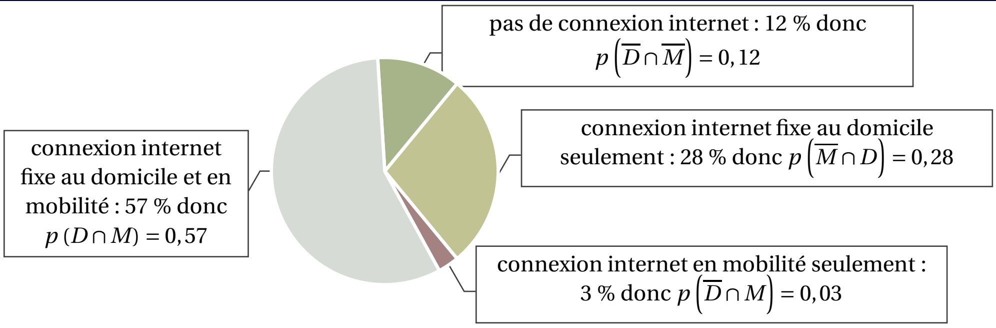
Terminale ES/L

Probabilités Conditionnelles

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. D'après Asie Juin 2017 — 6 points



Source : CREDOC, Enquêtes sur les « Conditions de vie et les aspirations », juin 2016.

On note D l'évènement « la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile ». On note M l'évènement« la personne dispose d'une connexion internet en mobilité ». On peut résumer ces données dans un tableau :

	D	$\overline{D}$	Total
M	$p\left(D\cap M\right)=0,57$	$p\left(\overline{D}\cap M\right)=0,03$	0,6
$\overline{M}$	$p\left(\overline{M}\cap D\right)=0,28$	$p\left(\overline{D}\cap\overline{M}\right)=0,12$	0,4
Total	0,85	0,15	1

1. Donner sans justification $p(D\cap M)$, puis justifier que $p(D)=0,85$.

- 57% des personnes interrogées disposent d'une connexion internet fixe au domicile et en mobilité donc :

$$\boxed{p\left(D\cap M\right)=0,57}$$

- Par ailleurs, 28% possède une connexion fixe au domicile seulement donc :

$$p\left(D\cap\overline{M}\right)=\underline{0,28}$$

- Les évènements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(D)=p\left(D\cap M\right)+p\left(D\cap\overline{M}\right)=0,57+0,28$$

$$\boxed{p(D)=0,85}$$

2. Calculer la probabilité que la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile sachant qu'elle dispose d'une connexion internet en mobilité.

La probabilité cherchée est $p_M\left(D\right)$ or on a :

$$p_M\left(D\right)=\frac{p\left(M\cap D\right)}{p(M)}=\frac{0,57}{p(M)}$$

Il nous faut donc calculer $p(M)$, on procède comme lors de la question (A1.).

- On a vu que : $p\left(D\cap M\right)=\underline{0,57}$;
- Par ailleurs, 3% possède une connexion en mobilité seulement donc : $p\left(M\cap\overline{D}\right)=\underline{0,03}$;
- Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(M)=p\left(D\cap M\right)+p\left(M\cap\overline{D}\right)=0,57+0,03=\underline{0,6}$$

On en conclut alors que :

$$\boxed{p_M(D) = \frac{p(M \cap D)}{p(M)} = \frac{0,57}{0,6} = \underline{0.95}}$$

3. Calculer la probabilité de l'évènement « la personne dispose d'une connexion internet ».

- <u>Méthode 1</u>
  La probabilité cherchée est $p(D \cup M)$ et on a :

$$\begin{aligned} p(D \cup M) &= p(D) + p(M) - p(D \cap M) \\ &= 0,85 + 0,6 - 0,57 \\ &= \underline{0,88} \end{aligned}$$

- <u>Méthode 2</u>.
  Plus simplement, le diagramme nous indique que 12% des personnes n'ont pas de connexion donc en passant à l'évènement contraire, 88% en ont une.
  La probabilité de l'évènement « *la personne dispose d'une connexion internet* ». est donc 0,88.

4. Calculer $p_{\overline{M}}\left(\overline{D}\right)$.
On cherche la probabilité que la personne ne dispose pas de connexion au domicile, sachant qu'elle ne possède pas de connexion en mobilité.

$$p_{\overline{M}}\left(\overline{D}\right) = \frac{p\left(\overline{M} \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{M}\right)}$$

Or on sait que :

- 12% des personnes n'ont pas de connexion donc : $p\left(\overline{M} \cap \overline{D}\right) = 0,12$;
- par ailleurs, on a montré lors de la question (A2.) que $p(M) = 0,6$ donc $p\left(\overline{M}\right) = 0,4$.

On obtient donc :

$$p_{\overline{M}}\left(\overline{D}\right) = \frac{p\left(\overline{M} \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{M}\right)} = \frac{0,12}{0,4} = \underline{0,3}$$

Exercice 2. D'après Centres Étrangers 2016 — 7 points

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux. On effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité. On dispose des informations suivantes sur le stock de production : le stock contient 40 % de pneus neige ; parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ; parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.
Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note : N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ; C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ; Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ». Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
D'après les données de l'exercice :

- le stock contient 40 % de pneus neige donc

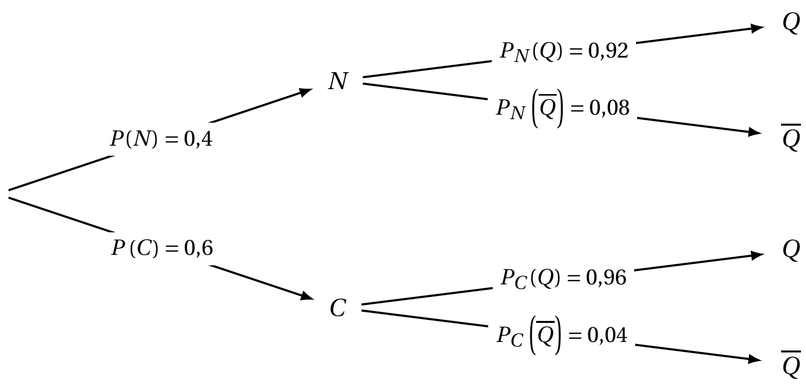
$$p(N) = 0,4 \text{ et } p(C) = 1 - 0,4 = 0,6$$

- parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité donc :

$$p_N(Q) = 0,92 \text{ et } p_N\left(\overline{Q}\right) = 1 - 0,92 = 0,08$$

- parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité donc :

$$p_C(Q) = 0,96 \text{ et } p_C\left(\overline{Q}\right) = 1 - 0,96 = 0,04$$



2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.

$$\boxed{p(N \cap Q) = p(N) \times p_N(Q) = 0,4 \times 0,92 = \underline{0,368}}$$

Cela signifie que $36,8\%$ des pneus du stock de production sont des pneus neige ayant réussi les tests de qualité.

3. Montrer que $p(Q) = 0,944$.
Les évènements N et C formant une partition de l'univers, on a d'apr la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(Q) &= P(Q \cap N) + P(Q \cap C)\\
P(Q) &= P(N) \times P_N(Q) + P(C) \times P_C(Q)\\
P(Q) &= 0{,}4 \times 0{,}92 + 0{,}6 \times 0{,}96\\
P(Q) &= 0{,}368 + 0{,}576\\
P(Q) &= \underline{0{,}944}
\end{aligned}$$

4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige?
On cherche $p_Q(N)$ soit :

$$\boxed{p_Q(N) = \frac{p(Q \cap N)}{p(Q)} = \frac{0,368}{0,944} \approx \underline{0,390}}$$

Exercice 3. D'après Centres Étrangers 2017 — 7 points

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A, B, C, D et E les évènements suivants :

- *A : « l'embarcation louée est un pédalo » et B : « l'embarcation louée est un kayak »; C : « l'embarcation louée est un bateau électrique »; D : « l'embarcation est louée pour 1 heure »; E : « l'embarcation est louée pour 2 heures ».*

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

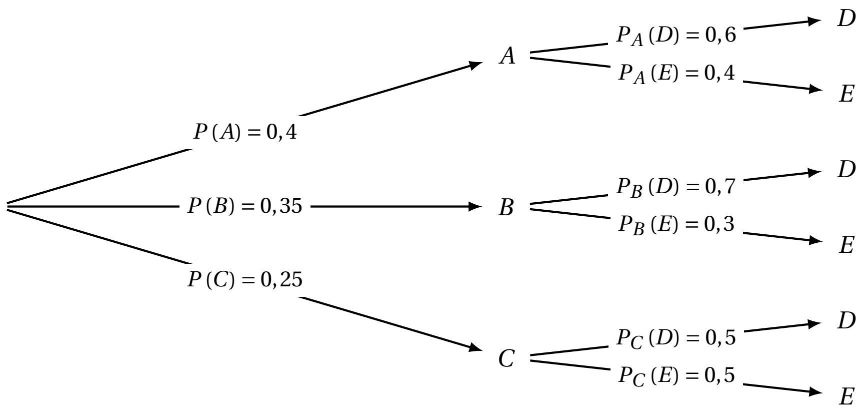
- *40 % des embarcations louées sont des pédalos et 35 % des embarcations louées sont des kayaks; les autres embarcations louées sont des bateaux électriques* donc :

$$p(A) = 0,4\ ;\ p(B) = 0,35 \text{ et } p(C) = 1 - 0,4 - 0,35 = 0,25$$

- *60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure; 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure; la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.* donc

$$p_A(D) = 0,6\ ;\ p_B(D) = 0,7 \text{ et } p_C(D) = 0,5$$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité $p(A \cap E)$.

On a directement :

$$p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0,4 \times 0,4 = \underline{0,16}$$

3. Montrer que la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.

La probabilité cherchée est $p(E)$. Les évènement A, B et C forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E) \\ &= 0,16 + 0,35 \times 0,3 + 0,25 \times 0,5 \\ p(E) &= \underline{0,39} \end{aligned}$$

La probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.

4. Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique ? Arrondir le résultat au centième.

La probabilités cherchée est $p_E(C)$ soit :

$$p_E(C) = \frac{p(E \cap C)}{p(E)} = \frac{0,25 \times 0,5}{0,39} \approx \underline{0,32}$$

5. *La base nautique pratique les tarifs suivants :*

	1 heure	2 heures
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16€
Bateau électrique	35 €	60€

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique.

On choisit une embarcation au hasard. Soit T la variable aléatoire donnant le tarif de location de cette embarcation.

On détermine alors la loi de probabilité de T puis son espérance que l'on multiplie enfin par 200

$$p(T = 15) = p(A \cap D) = 0,24 \text{ et } p(T = 10) = p(B \cap D) = 0,245$$

On obtient le tableau suivant :

t_i	10 €	15 €	16 €	25 €	35 €	60 €
événement	$B \cap D$	$A \cap D$	$B \cap E$	$A \cap E$	$C \cap D$	$C \cap E$
$p(T = t_i)$	0,245	0,24	0,105	0,16	0,125	0,125

L'espérance de cette variable aléatoire est alors de :

$$E(T) = 10 \times 0,245 + 15 \times 0,24 + 16 \times 0,105 + 25 \times 0,16 + 35 \times 0,125 + 60 \times 0,125 = 23,605$$

Ce qui représente le tarif moyen de location d'une embarcation.
Donc la recette espérée pour 200 embarcations est de $200 \times 23,605 = \underline{4721}$ €

Fin du devoir