Devoir Surveillé n°3A Correction

Terminale ES/L

Probabilités Conditionnelles et Convexité

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. EPI : Point d'inflexion — 2 points

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? :

Affirmation 1 (VRAIE)

La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion.

Preuve

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. Pour tout réel x on a facilement :

$$f''(x) = 12x - 6 \text{ et } f''(x) = 12x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Soit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f''(x) = 12x - 6$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f concave	0	f convexe	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = \frac{1}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion au point A d'abscisse $x = \frac{1}{2}$. L'affirmation est vraie.

Exercice 2. QCM — 6 points

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :

a. $]-\infty\,;\,+\infty[$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{b. } [-2\,;\,+\infty[}$ $\qquad$ **c.** $]-\infty\,;\,-2]$ $\qquad$ **d.** $[-6\,;\,+\infty[$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$. Dans l'intervalle $[-1\,;\,3]$, l'équation $g(x) = 0$ admet : $\boxed{\textbf{b. } \text{exactement 2 solutions}}$

x	-1	α	1	β	2	3
Variations de g	-2	0	2	0	-1	-0.5

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

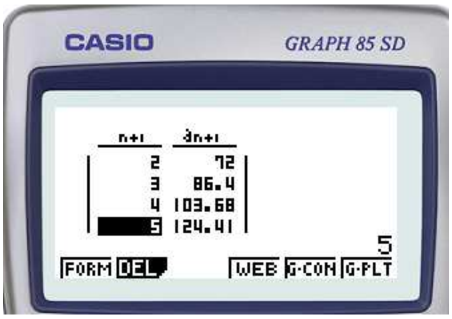
Variables :	n est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à U la valeur 50
	Tant que $U < 120$ faire
	U prend la valeur $1,2 \times U$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

En fin d'exécution, cet algorithme affiche la valeur :

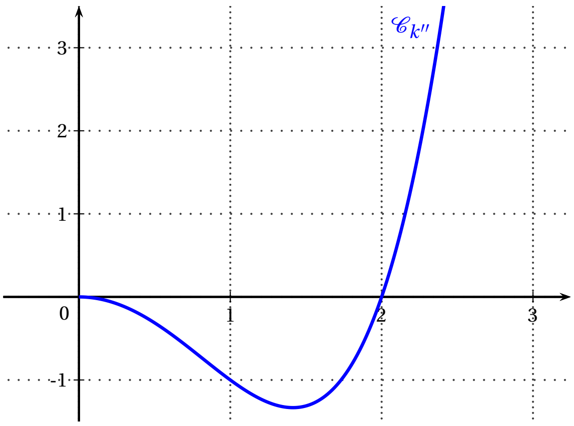
a. 4 **b.** 124,416 $\boxed{\textbf{c. } 5}$ **d.** 96

Preuve

Il suffit de calculer les valeurs de la suite associée :



4. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0~;~+\infty[$.



$\boxed{\textbf{a. } k \text{ est concave sur l'intervalle } [1~;~2]}$. **b.** k est convexe sur l'intervalle $[0~;~2]$.

c. k est convexe sur $[0~;~+\infty[$. **d.** k est concave sur $[0~;~+\infty[$.

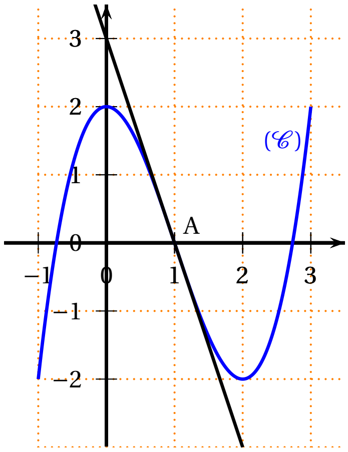
Preuve

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles .
f est concave si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles .

- Sur l'intervalle $[1~;~2]$, la dérivée seconde k'' est négative donc d'après la propriété 1, le fonction k est concave sur cet intervalle. La réponse a est correcte, il n'est pas nécessaire de tester les autres.
  La seule réponse possible à la question 4 est la réponse a.

5. On donne ci-dessous la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.
La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point $A(1\ ;\ 0)$ est tracée, elle passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 3)$.



La fonction h est :

$\boxed{\textbf{a.}\ \text{concave sur } [-1\ ;\ 1]}$

b. convexe sur $[-1\ ;\ 1]$

c. concave sur $[0\ ;\ 2]$

d. convexe sur $[0\ ;\ 2]$

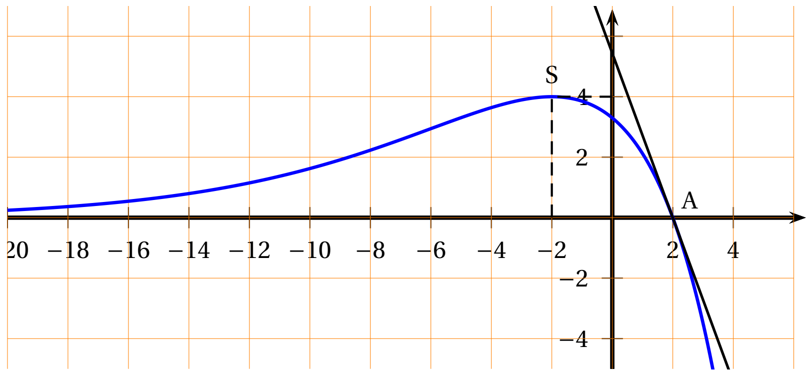
Preuve

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes.

6. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_{f_6} d'une fonction f_6 définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



La fonction f_6 est :

a. concave sur $]-\infty\ ;\ 0]$

b. convexe sur $]-\infty\ ;\ 0]$

$\boxed{\textbf{c.}\ \text{concave sur } [0\,;\,2]}$

d. convexe sur $[0\,;\,2]$

Exercice 3. Location de voitures 6 points

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise. Une étude statistique a permis d'établir que :

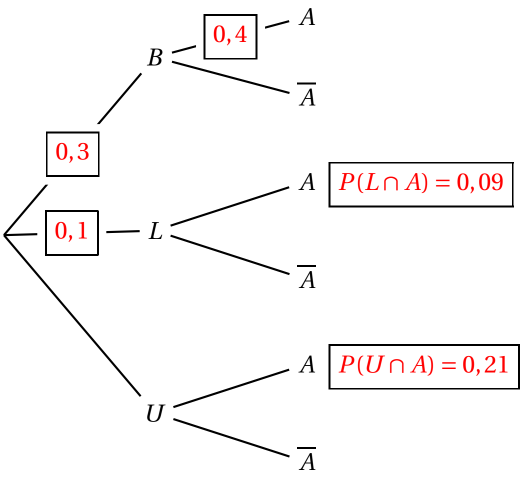
- *30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe. 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise. 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise. 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.*
- *B : « le client a loué une berline. » , L : « le client a loué un véhicule de luxe. »*
  et U : « le client a loué un véhicule utilitaire. » et A : « le client a choisi l'option d'assurance sans franchise. »

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

Avec les données de l'énoncé, on peut dire que :

$$P(B) = 0,3,\ P_B(A) = 0,4,\ P(L) = 0,1,\ P(L \cap A) = 0,09 \text{ et } P(U \cap A) = 0,21.$$

On place ces résultats dans l'arbre :



2. Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise ?

L'évènement « le client a loué une berline et a choisi l'option d'assurance sans franchise » est l'évènement $B \cap A$.

D'après l'arbre :

$$P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A) = 0,4 \times 0,3 = \underline{0,12}$$

3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.

On cherche $P(A)$. Les évènements B, L et U forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B \cap A) + P(L \cap A) + P(U \cap A) = 0,12 + 0,09 + 0,21 = \underline{0,42}$$

4. Calculer $P_L(A)$, la probabilité que le client ait souscrit une assurance sans franchise sachant qu'il a loué une voiture de luxe.

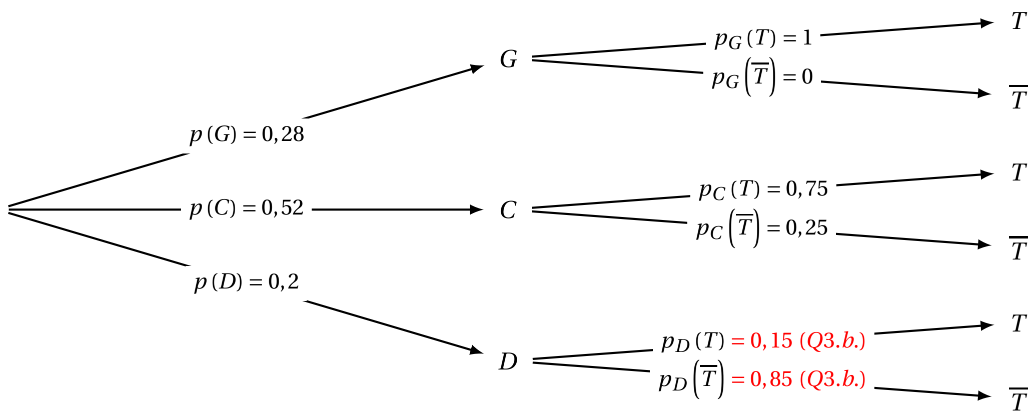
$$P_L(A) = \frac{P(L \cap A)}{P(L)} = \frac{0,09}{0,1} = \underline{0,9}$$

Exercice 4. Le péage — 6 points

[...] 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche et ces derniers franchissent toujours le péage en moins de 10 secondes ; 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre et parmi ceux-ci 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ; les autres automobilistes empruntent la voie de droite.
On choisit un automobiliste au hasard et on considère les évènements suivants : G : « l'automobiliste emprunte la voie de gauche » ; C : « l'automobiliste emprunte la voie du centre » ; D : « l'automobiliste emprunte la voie de droite » ; T : « l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

- $p(G) = 0,28$ car « 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche » ;
- $p(C) = 0,52$ car « 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche » ;
- Et donc $p(D) = 1 - 0,28 - 0,52 = 0,2$;
- $p_G(T) = 1$ car « ceux qui prennent la voie de gauche franchissent toujours le péage en moins de 10 secondes ». On a donc $p_G(\overline{T}) = 0$.
- $p_C(T) = 0,75$ car « 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre et parmi ceux-ci 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ». On a donc $p_C(\overline{T}) = 0,25$.



2. Calculer la probabilité $p(C \cap T)$.

$$\boxed{p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,52 \times 0,75 = \underline{0,39}}$$

3. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.

3. a. Justifier que $p(D \cap T) = 0,03$.

Puisque 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes on a $p(T) = 0,7$. Puisque les évènements G, C et D forment une partition de l'univers, d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(G \cap T) + p(C \cap T) + p(D \cap T) \\ 0,7 &= p(G) \times p_G(T) + 0,39 + p(D \cap T) \\ 0,7 &= 0,28 \times 1 + 0,39 + p(D \cap T) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{p(D \cap T) = 0,7 - 0,28 - 0,39 = \underline{0,03}}$$

3. b. Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

La probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes est :

$$\boxed{p_D(T) = \frac{p(D \cap T)}{p(D)} = \frac{0,03}{0,2} = \underline{0,15}}$$

Fin du devoir

QCM des autres DS B et C — 6 points

Pour le DS 3A

1. b
2. b
3. c
4. a
5. a
6. c

Pour le DS 3B

1. a
2. c
3. a
4. d
5. d
6. b

Pour le DS 3C

1. d
2. d
3. d
4. c
5. c
6. a

EPI des autres DS : Point d'inflexion — 2 points

4.1 Pour le DS 3B

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion.

Preuve
La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. Pour tout réel x on a facilement :

$$f''(x) = 6x - 6 \text{ et } f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f''(x) = 6x - 6$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f concave	0	f convexe	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = 1$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion au point A d'abscisse $x = 1$. L'affirmation est vraie.

4.2 Pour le DS 3C

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion.

Preuve
La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. Pour tout réel x on a facilement :

$$f''(x) = 12x - 6 \text{ et } f''(x) = 12x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f''(x) = 12x - 6$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f concave	0	f convexe	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = \frac{1}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ présente un point d'inflexion au point A d'abscisse $x = \frac{1}{2}$. L'affirmation est vraie.