Devoir Surveillé n°6 Correction

Terminale ES/L

Intégrales et primitives

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20.5 points

Exercice 1. Application du cours — 4 points

1. [2 pts] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

- La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives qui sont de la forme :

$$F_k(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 3x + k = \underline{2x^3 - 2x^2 + 3x + k}$$

- La primitive qui s'annule en 0 vérifie $F_k(0) = 0$ soit :

$$F_k(0) = 0 \iff \underbrace{2 \times 0^3 - 2 \times 0^2 + 3 \times 0}_{0} + k = 0 \iff k = 0$$

C'est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x}$$

2. [1 pt] Calculer : $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(2) - F(0)\\ &= (2 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2) - 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 14}$$

3. [1 pt] En déduire la valeur moyenne de f sur [0 ; 2].

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \boxed{m = \frac{1}{2-0} \times \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{2} = 7}$$

Exercice 2. — 5 points

Soit g et G définies sur $]0\,;+\infty[$ *par :* $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ *et* $G(x) = (\ln x)^2$.

1. [1.5 point] Démontrer que G est une primitive de g.

La fonction G est une primitive de g si elle est dérivable et que $G' = g$.

Or G est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Elle est de la forme u^2 donc de dérivée $2u'u$ avec pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \dfrac{1}{x}$

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}G'(x) &= 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x\\ G'(x) &= 2 \times \frac{\ln x}{x}\\ G'(x) &= \underline{g(x)}\end{aligned}$$

G est bien une primitive de g

2. [1 point] Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x = \mathrm{e}$.

Les primitives de g sont de la forme $H_k(x) = G(x) + k = (\ln x)^2 + k$ donc la primitive de g qui s'annule pour $x = \mathrm{e}$ vérifie :

$$H_k(\mathrm{e}) = 0 \Longleftrightarrow G(\mathrm{e}) + k = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{(\ln \mathrm{e})^2}_{1^2} + k = 0 \Longleftrightarrow k = -1$$

Soit

$$\boxed{H(x) = (\ln x)^2 - 1}$$

3. [1.5 point] Montrer que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

On remarque que

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x} = 2 \times \frac{\ln x}{x} \Longleftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2} \times g(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \times \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\
\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \times \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \times (G(\mathrm{e}) - G(1)) \\
&= \frac{1}{2} \times \underbrace{\left((\ln \mathrm{e})^2 - (\ln 1)^2\right)}_{1-0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}}$$

4. [1 point] Calculer la valeur moyenne de g sur $[1\,;\ \mathrm{e}]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit

$$m = \frac{1}{\mathrm{e}-1} \times \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1} \times \underbrace{(G(\mathrm{e}) - G(1))}_{1}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{\mathrm{e}-1}}$$

Exercice 3. 4.5 points

Soit h et H définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}$ et $H(x) = x e^{1-x^2}$.

1. [2 points] Démontrer que H est une primitive de h.

La fonction H est une primitive de h si elle est dérivable et que $H' = h$.

Or H est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec pour tout x de $]0; +\infty[$:

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$	$v'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
H'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{1-x^2} + x \times \left(-2x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \\
H'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{1-x^2} - 2x^2 \times \mathrm{e}^{1-x^2} \\
H'(x) &= \left(1 - 2x^2\right) \times \mathrm{e}^{1-x^2} \\
H'(x) &= \underline{h(x)}
\end{aligned}$$

H est bien une primitive de h

2. **[1.5 point] Calculer : $\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x &= H(1)-H(0)\\ &= 1\times \mathrm{e}^{1-1^2} - \underbrace{0\times\mathrm{e}^{1-0^2}}_{0}\end{aligned}$$

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\mathrm{e}^0 = 1}$$

$$\boxed{\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1}$$

3. **[1 point] En déduire la valeur de : $\int_0^1 \left(2-4x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.**

On remarque que :

$$\left(2-4x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2} = 2\times\left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2} = 2\times h(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(2-4x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\times\int_0^1 \left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\times\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left(2-4x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{2\times 1}$$

$$\boxed{\int_0^1 \left(2-4x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2}$$

Bonus

Calculer : $\int_0^1 \left(3-6t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

L'astuce est de remarquer que pour tout réel t on a :

$$\left(3-6t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2} = 3\times\left(1-2t^2\right)\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{1-t^2} = 3\,\mathrm{e}^{-1}\times h(t)$$

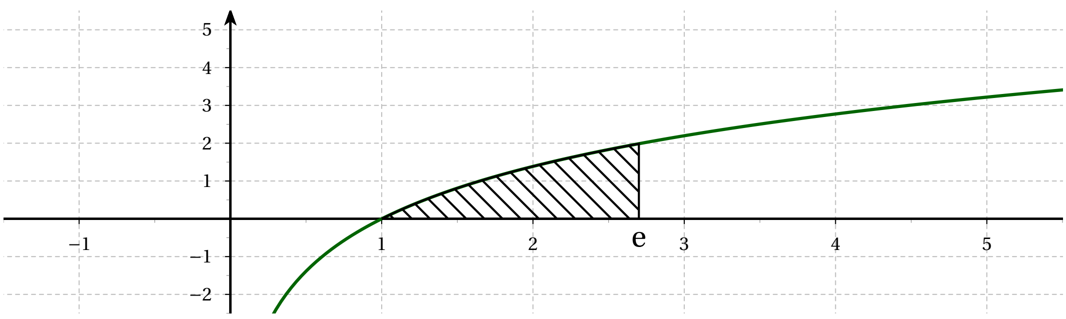
Donc

$$\int_0^1 \left(3-6t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{e}^{-1}\times\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{e}^{-1}\times 1 = \underline{3\,\mathrm{e}^{-1}}$$

Exercice 4. Un encadrement — 7 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x$$



1. **[0.75 point] On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.**
Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

2. **[0.75 point] Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.**
Un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée est :

$$\boxed{1 < \mathscr{A} < 4}$$

3. **[2 points] Montrer qu'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est : $F(x) = 2x\ln x - 2x$.**
La fonction F est définie et dérivable sur I. Elle est de la forme $uv - w$ donc de dérivée $u'v + uv' - w'$ avec pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$:

$u(x) = 2x$	$u'(x) = 2$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$
$w(x) = 2x$	$w'(x) = 2$

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 2\\
F'(x) &= 2\ln x + 2 - 2\\
F'(x) &= 2\ln x\\
F'(x) &= \underline{f(x)}
\end{aligned}$$

La dérivée de F sur $]0\,;+\infty[$ est donc f ce qui prouve que la fonction F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

4. **[1.5 point] Montrer que l'intégrale sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ de f est : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x = 2$.**

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x &= F(\mathrm{e}) - F(1)\\
&= (2\times \mathrm{e}\ln \mathrm{e} - 2\mathrm{e}) - (2\times 1\ln 1 - 2\times 1)\\
&= \underbrace{(2\mathrm{e} - 2\mathrm{e})}_{0} - \left(\underbrace{2\ln 1}_{0} - 2\times 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x = \underline{2}}$$

5. **[2 points] On a tracé ci-dessous (T), la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. La tangente (T) est d'équation $y = 2x - 2$. On admet que (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.**
On admet que (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$ donc l'expression $\big(2x - 2 - f(x)\big)$ est positive sur $]0\,;+\infty[$.
De ce fait, l'aire l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est donnée, en unités d'aire par : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \big(2x - 2 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \longmapsto 2x - 2$ est continue sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ donc elle admet des primitive de la forme $x \longmapsto x^2 - 2x + k$. On a donc par linéarité :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} \big(2x - 2 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\\
\mathscr{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} (2x - 2)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[x^2 - 2x\right]_1^{\mathrm{e}} - 2\\
\mathscr{A} &= \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - \left(1^2 - 2\right) - 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - 1}$$

Bonus
Retrouver par le calcul l'équation de (T) et montrer (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

Fin du devoir