Devoir Surveillé n°1A
Correction
Terminale ES/L
Suites
Durée 1,5 heure - Coeff. 7
Noté sur 20 points

Exercice 1. QCM d'après Bac — 3 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Question 1

La somme $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{20}$ est égale à :

a. $1 - 2^{20}$ | $\boxed{\textbf{b. } 2^{21} - 2}$ | **c.** $2 - 2^{21}$ | **d.** $2^{20} - 1$

Preuve

On reconnait la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 2 :

$$\begin{aligned} S &= 1\text{er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q} \\ &= 2 \times \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} \\ &= \frac{2}{-1} \times \left(1 - 2^{20}\right) \\ &= -2 \times \left(1 - 2^{20}\right) \\ S &= \underline{-2 + 2^{21}} \end{aligned}$$

Question 2

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 34\,000$ et de raison $q = 1,05$ est de terme général :

a. $32\,380,95 \times 1,05^n$ | **b.** $34\,000 \times 1,05^n$ | $\boxed{\textbf{c. } 34\,000 \times 1,05^{n-1}}$ | **d.** $35\,700 \times 1,05^n$

Preuve

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 34\,000$ et de raison $q = 1,05$ est de terme général, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_p \times q^{n-p} \\ u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\ u_n &= 34\,000 \times 1,05^{n-1} \end{aligned}$$

Question 3

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.
La somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$ est égale à :

a. $5 \times \left(1 - 0,5^9\right)$

b. $\boxed{10 \times \left(1 - 0,5^{10}\right)}$

c. $10 \times \left(1 - 0,5^9\right)$

d. $5 \times \left(1 - 0,5^{10}\right)$

Preuve

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$, alors la somme de ses 10 premiers termes est donnée par :

$$\begin{aligned} S &= \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q} \\ &= u_0 \times \frac{1 - 0,5^{10}}{1 - 0,5} \\ &= 5 \times \frac{1 - 0,5^{10}}{0,5} = \frac{5}{0,5} \times \left(1 - 0.5^{10}\right) \\ S &= \underline{10 \times \left(1 - 0.5^{10}\right)} \end{aligned}$$

Exercice 2. 2 points

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $1,1$. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{25}$ en donnant la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $1,1$, alors la somme de ses 26 premiers termes est donnée par :

$$\begin{aligned} S &= \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q} \\ &= u_0 \times \frac{1 - 1,1^{26}}{1 - 1,1} \\ &= 2 \times \frac{1 - 1,1^{26}}{-0,1} \\ S &= \underline{20 \times \left(1 - 1,1^{26}\right)} \approx \underline{218,36} \end{aligned}$$

Exercice 3. D'après BAC 15 points

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 65$ *et pour tout entier naturel* n *:* $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. Calculer u_1 et u_2.

n	0	1	2
u_n	65	$u_1 = 0,8 \times 65 + 18 = 70$	$u_2 = 0,8 \times 70 + 18 = 74$

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8. On précisera la valeur de v_0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 65 \\ u_{n+1} & = 0{,}8 \times u_n + 18 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 90 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 90 \\ v_{n+1} &= (0{,}8\ u_n + 18) - 90 \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times u_n - 72 \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times \left(u_n + \frac{-72}{0{,}8}\right) \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times (u_n - 90) \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $v_0 = -25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 90 \\ v_0 &= 65 - 90 \\ v_0 &= -25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -25 \\ v_{n+1} & = 0{,}8 \times v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $v_0 = -25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = -25 \times (0{,}8)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 90$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 90$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = -25 \times (0{,}8)^n + 90}$$

3. Variations.

3. a. Déterminer les variations de la suite (v_n).

La suite (v_n) est géométrique, de premier terme négatif, et de raison $q = 0,8 \in]0 ; 1[$. Elle est donc strictement croissante.

3. b. En déduire celles de la suite (u_n).
Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} + 90) - (v_n + 9) = \underline{v_{n+1} - v_n > 0}$$

Car on vient de montrer que la suite (v_n) était croissante, donc $v_{n+1} - v_n$ est positif ce qui implique que $u_{n+1} - u_n$ l'est aussi. Donc la suite (u_n) est aussi croissante.

4. Limites.

4. a. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,8 < 1$ et d'après le théorème 1 on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,8)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} -25 \times (0,8)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

4. b. En déduire celle de la suite (u_n).
Puisque pour tout entier n on a : $u_n = v_n + 90$ on a alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \\ u_n = v_n + 90 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 90$$

5. Á l'aide de la calculatrice, résoudre l'inéquation : $u_n \geqslant 85$.

n	7	8
u_n	$84.757 < 85$	$85.806 > 85$

Puisque le suite (u_n) est croissante, les solutions de l'inéquation sont les entiers supérieurs ou égaux à 8.

6. *La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de* 52 € *par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017,* 65 *particuliers ont souscrit cet abonnement. Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes : • d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ; • chaque mois,* 18 *particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.*

6. a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

- Au mois de juillet, 65 particuliers ont souscrit à l'abonnement donc $u_0 = 65$.
- D'un mois sur l'autre, environ 20% des abonnements sont résiliés et 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.
  Donc le nombre d'abonnés au panier bio le $n+1$-ième mois qui suit le mois de juillet 2017, s'obtient en conservant 80% des u_n abonnés du mois précédent et en en ajoutant 18 soit :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18$$

- Conclusion : la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

6. b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.
On cherche à savoir si la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018. Puisque Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois et que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017, la recette mensuelle est de :

$$52 \times u_n$$

On cherche donc à résoudre, pour n entier entre 6 et 17 (de janvier 2018 pour $n = 6$, à décembre 2018 pour $n = 17$) l'inéquation :

$$52 \times u_n \geq 4420\text{ €} \Longleftrightarrow u_n \geq \frac{4420}{52} = 85$$

On reprend alors le résultat obtenu lors de la question (3.)

$$u_n \geq 85 \iff n \geq 8$$

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va dépasser 4 420 € en <u>mars 2018</u> (pour $n = 8$).

6. c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ? Argumenter la réponse.

On a montré que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 90$$

À partir d'un certain nombre de mois, le nombre d'abonnés sera chaque mois proche de 90 ce qui correspond à une recette :

$$90 \times 52€ = 4680€$$

La recette mensuelle de la société Biocagette tend vers <u>4680 euros</u>.

Fin du devoir