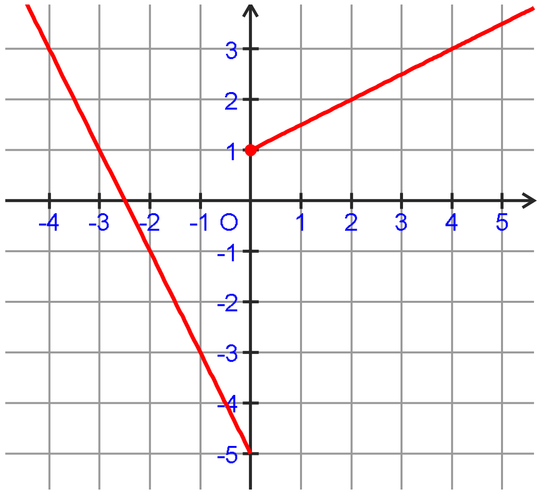
Exercice 01

1°) $f(x) = -2x - 5$ si $x < 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ si $x \geqslant 0$



La courbe de f est constituée de la partie de la droite d'équation $y = -2x - 5$ pour $x < 0$

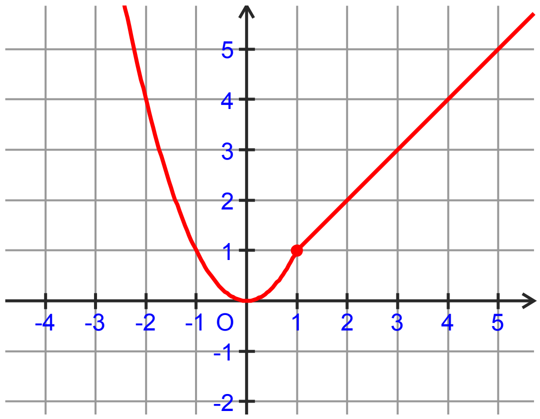
et de la partie de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ pour $x \geqslant 0$

La courbe de la fonction f ne peut pas être tracée sans lever le crayon de la feuille.

f n'est pas une fonction continue sur IR.

f est continue sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ mais f n'est pas continue en 0.

2°) $g(x) = x^2$ si $x \leqslant 1$ et $g(x) = x$ si $x > 1$



La courbe de g est constituée de la partie de la parabole d'équation $y = x^2$ pour $x \leqslant 1$

et de la partie de la droite d'équation $y = x$ pour $x > 1$

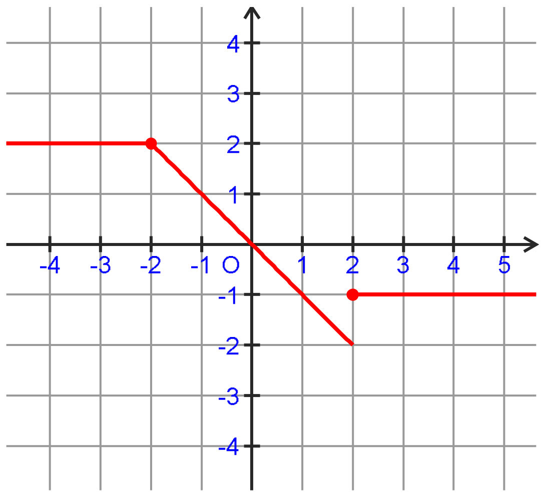
La courbe de la fonction g peut être tracée sans lever le crayon de la feuille.

g est une fonction continue sur IR.

3°) $h(x) = 2$ si $x \in]-\infty ; -2]$;

$h(x) = -x$ si $x \in]-2 ; 2[$

et $h(x) = -1$ si $x \in [2 ; +\infty[$



La courbe de h est constituée

de la partie de la droite d'équation $y = 2$ pour $x \in]-\infty ; -2]$;

de la partie de la droite d'équation $y = -x$ pour $x \in]-2 ; 2[$

et de la partie de la droite d'équation $y = -1$ pour $x \in [2 ; +\infty[$

La courbe de la fonction h ne peut pas être tracée sans lever le crayon de la feuille.

h n'est pas une fonction continue sur IR.

h est continue sur les intervalles $]-\infty ; -2]$; $]-2 ; 2[$ et $[2 ; +\infty[$; h est continue en -2 mais h n'est pas continue en 2.

Exercice 02

1°) Si le revenu annuel imposable est $x = 5\,000$, on a $x \leqslant 6\,011$ donc $\mathrm{I}(x) = 0$

Un célibataire qui a un revenu annuel imposable de 5 000 € ne paie pas d'impôt sur le revenu.

Si le revenu annuel imposable est $x = 10\,000$, on a $6\,011 < x \leqslant 11\,991$ donc $\mathrm{I}(x) = 0{,}055x - 330{,}61$

c'est-à-dire $\mathrm{I}(x) = 0{,}055 \times 10\,000 - 330{,}61 = 219{,}39$

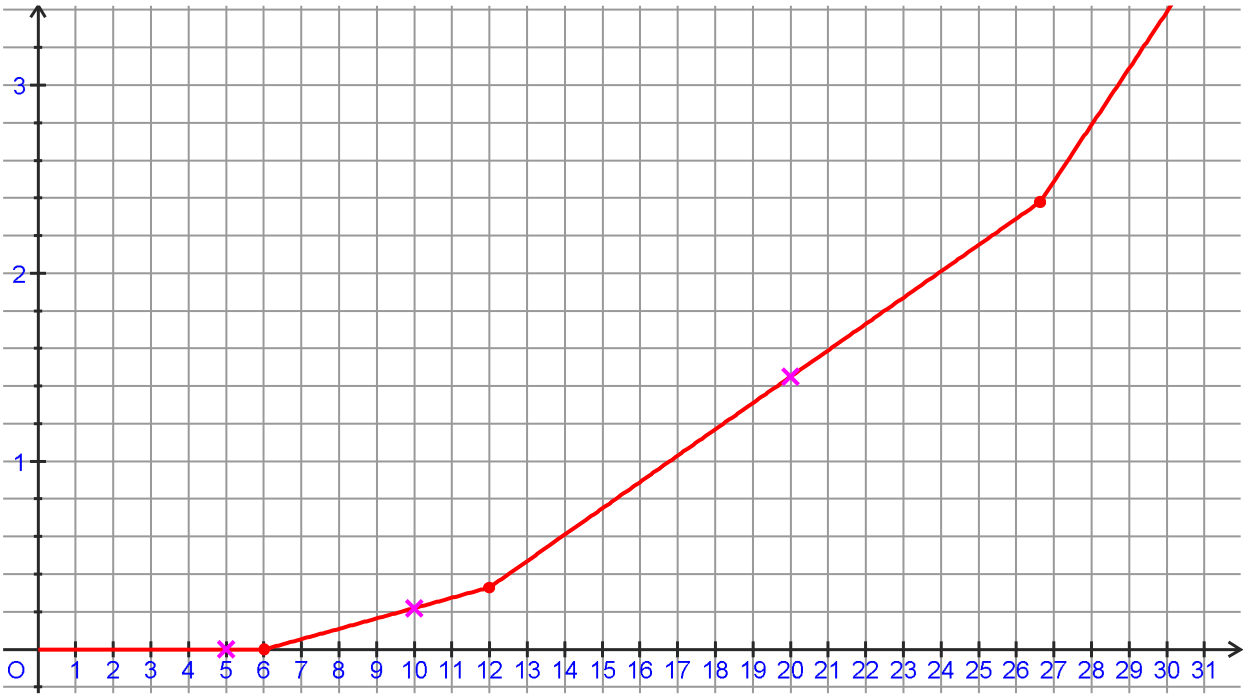
Un célibataire qui a un revenu annuel imposable de 10 000 € paie 219,39 € d'impôt sur le revenu.

Si le revenu annuel imposable est $x = 20\,000$, on a $11\,991 < x \leqslant 26\,631$ donc $\mathrm{I}(x) = 0{,}14x - 1\,349{,}84$

c'est-à-dire $\mathrm{I}(x) = 0{,}14 \times 20\,000 - 1\,349{,}84 = 1\,450{,}16$

Un célibataire qui a un revenu annuel imposable de 20 000 € paie 1 450,16 € d'impôt sur le revenu.

2°) On place sur le graphique les trois points correspondants aux trois situations de la question précédente.



La partie de la courbe qui est visible peut être tracée sans lever le stylo de la feuille.

Au vu de ce graphique, on peut dire que la fonction "Impôt sur le revenu" est une fonction continue.

3°) Un revenu imposable de 20 000 € peut se décomposer en

6011 € de revenus dans la "tranche" de 0 à 6 011 €

5980 € de revenus dans la "tranche" de 6 011 à 11 991 €

et le reste, soit $20\,000 - 6011 - 5980 = 8009$ dans la "tranche" de 11 991 à 26 631 €

L'impôt est alors de 5,5% de 5 980 et 14% de 8 009

On a alors $\mathrm{I} = 5\,980 \times 5{,}5\% + 8009 \times 14\% = 1\,450{,}16$

La décomposition donne le même résultat que celui trouvé à la première question.

4°) La fonction "Impôt sur le revenu" étant continue, il n'y a pas de "saut", même lors d'un changement de tranche.

Les revenus supplémentaires qui se trouveront dans la nouvelle tranche seront imposés avec un coefficient de 0,14. C'est-à-dire que l'impôt supplémentaire correspond à 14% du revenu supplémentaire.

Le fait de faire des heures supplémentaires et d'augmenter son revenu ne peut donc pas se traduire par une perte après impôt, et ceci est vrai dans tous les cas car il n'y a pas d'imposition à plus de 100% (la dernière tranche est imposée à 45%) .

Exercice 03

x	-5	a	2	4
f	7	1	-3	0

D'après le tableau de variations,

$1 \in [-3 ; 7]$, f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-5 ; 2]$,
donc l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique a dans l'intervalle $[-5 ; 2]$.
$1 \notin]-3 ; 0]$, donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]2 ; 4]$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 1$ a une solution et une seule.

Exercice 04

a) avec $k = -5$; l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans l'intervalle $[-5;10]$.

x	-5	a	-1		0		10
			0				5
f		$\nearrow$ -5		$\searrow$		$\nearrow$	
	-8				-2		

b) avec $k = -1$; l'équation $f(x) = k$ a trois solutions dans l'intervalle $[-5;10]$.

x	-5	a	-1	b	0	c	10
			0				5
f		$\nearrow$ -1		$\searrow$ -1		$\nearrow$ -1	
	-8				-2		

c) avec $k = 7$; l'équation $f(x) = k$ n'a aucune solution dans l'intervalle $[-5;10]$.
(le maximum de la fonction f est 5, donc $f(x)$ ne prend jamais la valeur 7)

d) avec $k = 3$; l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans l'intervalle $[-5;10]$.

x	-5		-1		0	a	10
			0				5
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$ 3	
	-8				-2		

Exercice 05

f est définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ pour $x \in [0 ; 5]$. On a : $f'(x) = 2x - 3$

$2x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ et $2x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

f étant définie sur $[0 ; 5]$, on obtient : $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[0 ; \frac{3}{2}\right]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left[\frac{3}{2} ; 5\right]$

On peut alors donner le tableau de variations de f

On a $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4}$

$f(0) = 1$ et $f(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 1 = 25 - 15 + 1 = 11$

x	0		$\frac{3}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	11

D'après le tableau de variations,

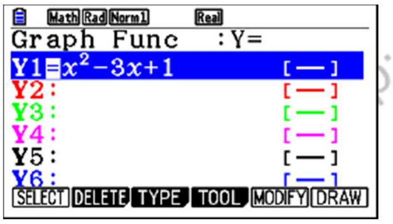
$8 \notin \left[-\frac{5}{4} ; 1\right]$, donc l'équation $f(x) = 8$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$.

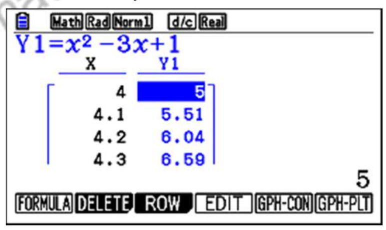
$8 \in \left[-\frac{5}{4} ; 11\right]$, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2} ; 5\right]$,

donc l'équation $f(x) = 8$ a une solution unique dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2} ; 5\right]$.

L'équation $f(x) = 8$ a une solution unique α dans $[0 ; 5]$.

On peut compléter le tableau de valeurs en utilisant un tableau donné par la calculatrice.





On obtient :

x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
$f(x)$	5	5,51	6,04	6,59	7,16	7,75	8,36	8,99	9,64	10,31	11

f est croissante et on a $f(4{,}5) \approx 7{,}75$ donc $f(4{,}5) < 8$ et $f(4{,}6) \approx 8{,}36$ donc $f(4{,}6) > 8$

On en déduit que $\alpha \approx 4{,}5$ à 0,1 près par défaut

Pour trouver la valeur exacte de α, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 8$

On a : $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0$

On peut résoudre cette équation du second degré en cherchant son discriminant :

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 9 + 28 = 37$

Le trinôme $x^2 - 3x - 7$ a donc pour racines $x_1 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$

$\frac{3 - \sqrt{37}}{2}$ est négatif, donc la solution cherchée α est nécessairement égale à $\frac{3 + \sqrt{37}}{2}$

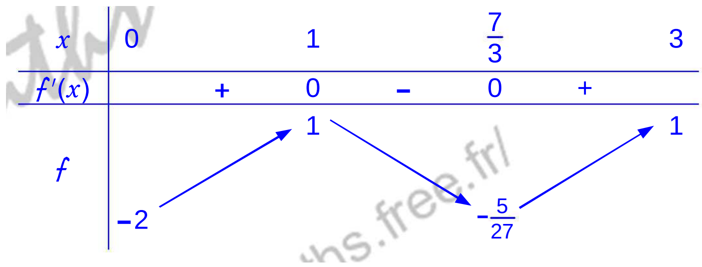
On a donc $\alpha = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ On peut vérifier que $\frac{3 + \sqrt{37}}{2} \approx 4{,}54138$

Exercice 06

1°) On peut écrire $(x-1)^2(x-3) = (x^2-2x+1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + x - 3$.
Donc $(x-1)^2(x-3) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

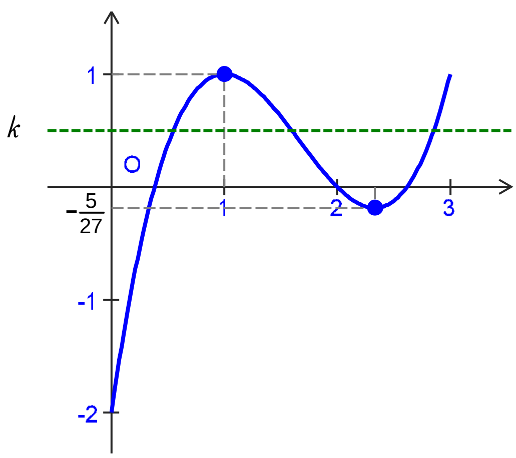
2°) On peut écrire :
$f(x) = 1 \iff x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 1 \iff x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 \iff (x-1)^2(x-3) = 0$
$\iff x - 1 = 0$ ou $x - 3 = 0 \iff x = 1$ ou $x = 3$
f étant définie sur $[0\,;3]$, l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions qui sont 1 et 3.
(On dit que 1 est une solution double)

3°) f est dérivable sur $[0\,;3]$ et on a : $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$
Le trinôme $3x^2 - 10x + 7$ a pour discriminant $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 100 - 84 = 16$
$\Delta > 0$, donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{16}}{2 \times 3} = \dfrac{10-4}{6} = 1$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{16}}{2 \times 3} = \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3}$.
La règle du signe du trinôme permet de trouver le signe de $f'(x)$ et donc le sens de variations de f.
On sait que $f(1) = 1$ et $f(3) = 1$ (d'après la deuxième question) et on calcule
$f(0) = -2$ et $f\left(\dfrac{7}{3}\right) = \left(\dfrac{7}{3}\right)^3 - 5 \times \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 + 7 \times \dfrac{7}{3} - 2 = \dfrac{343}{27} - \dfrac{245}{9} + \dfrac{49}{3} - 2 = -\dfrac{5}{27}$
On obtient le tableau :



4°) On peut déduire du tableau de variations précédent que:
- si $k > 1$; l'équation $f(x) = k$ n'a aucune solution.
- si $k = 1$; l'équation $f(x) = k$ a deux solutions qui sont 1 et 3. (voir première question)
- si $-\dfrac{5}{27} < k < 1$; l'équation $f(x) = k$ a trois solutions.
- si $k = -\dfrac{5}{27}$; l'équation $f(x) = k$ a deux solutions.
- si $-2 \leqslant k < -\dfrac{5}{27}$; l'équation $f(x) = k$ a une solution.
- si $k < -2$; l'équation $f(x) = k$ n'a aucune solution.

On peut visualiser les résultats en utilisant la courbe de f donnée ci-contre :



Exercice 07

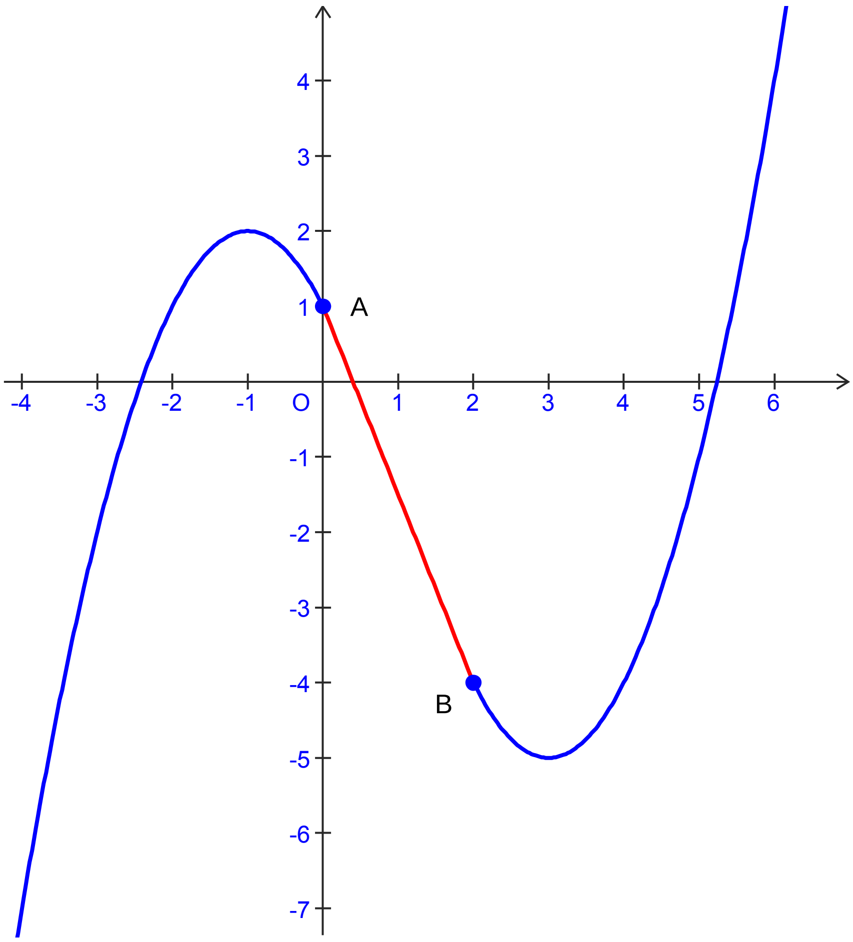
Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, la fonction f est définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 1$. Donc, sur cet intervalle, f est représentée graphiquement par un arc de parabole se terminant au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = -0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$; c'est-à-dire au point A(0 ; 1).

Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Donc, sur cet intervalle, f est représentée graphiquement par un arc de parabole débutant au point d'abscisse 2 et d'ordonnée $f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 4 = -4$; c'est-à-dire au point B(2 ; −4).

Sur l'intervalle $]0 ; 2[$, la fonction f est définie par $f(x) = ax + b$. Donc, sur cet intervalle, f est représentée graphiquement par un segment de droite.
Pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que ce segment soit le segment]AB[, ce qui permettra de tracer la courbe sans lever le stylo de la feuille.
Pour $x = 0$, on doit donc avoir $ax + b = 1$; c'est-à-dire $a \times 0 + b = 1$ donc $b = 1$
et pour $x = 2$, on doit avoir $ax + b = -4$; c'est-à-dire $a \times 2 + 1 = -4$ donc $2a = -5$ donc $a = -\frac{5}{2}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ lorsque $a = -\frac{5}{2}$ et $b = 1$.

On peut vérifier en représentant graphiquement f
avec $a = -\frac{5}{2}$ et $b = 1$



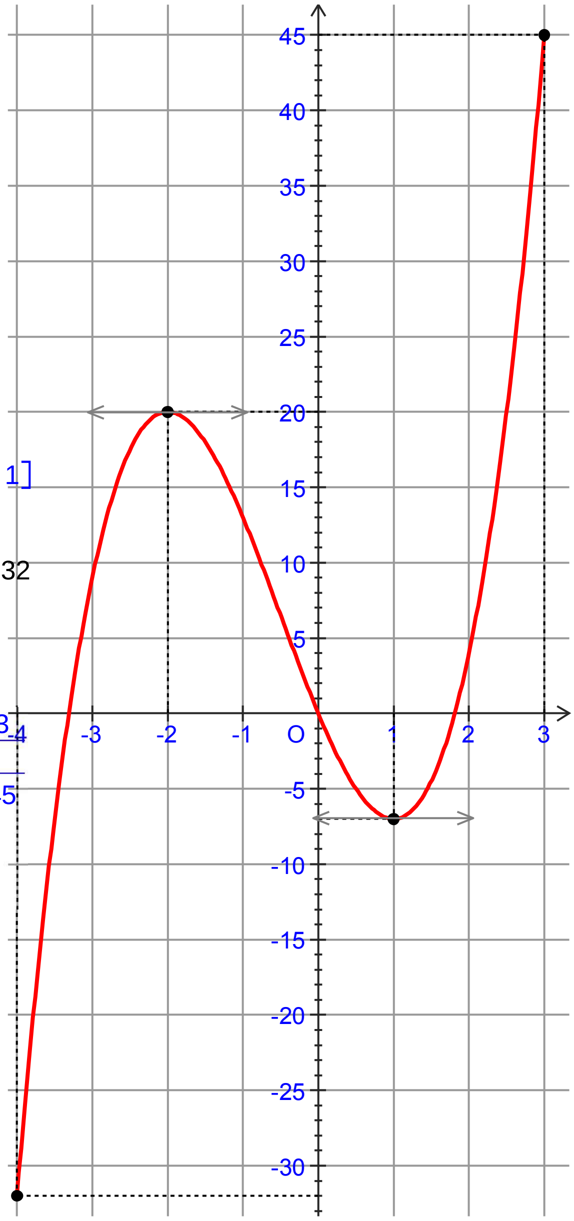
Exercice 08

g est définie sur $[-4 ; 3]$ par $\quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

1°) g est dérivable sur $[-4 ; 3]$ et $g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
donc $\quad g'(x) = 6(x^2 + x - 2)$
$x^2 + x - 2$ est un trinôme du second degré ayant pour discriminant $\quad \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$
Le trinôme a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-1 - 3}{2 \times 1} = \dfrac{-4}{2} = -2 \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{-1 + 3}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$
La règle du signe du trinôme permet de donner le signe de $g'(x)$. On a :
$g'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [-2 ; 1]$ et $g'(x) > 0$ pour $x \notin [-2 ; 1]$
On peut alors dresser le tableau de variations de g en notant que :
$g(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 12(-4) = -128 + 48 + 48 = -32$
$g(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = -16 + 12 + 24 = 20$
$g(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 12 \times 1 = 2 + 3 - 12 = -7$
et $g(3) = 2 \times 3^3 + 3 \times 3^2 - 12 \times 3 = 54 + 27 - 36 = 45$

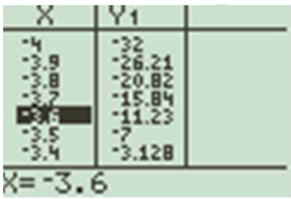
x	-4		-2		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-32	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	45

On trace alors la représentation graphique de g .



2°) L'équation $\quad 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 = 0 \quad$ peut s'écrire
$2x^3 + 3x^2 - 12x = -8 \quad$ c'est-à-dire $\quad g(x) = -8$
D'après le tableau de variations de g,
$-8 \in [-32 ; 20]$ et g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-4 ; -2]$,
donc l'équation $g(x) = -8$ a une solution unique dans l'intervalle $[-4 ; -2]$.
$-8 \notin]-7 ; 20[$, donc l'équation $g(x) = -8$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-2 ; 1[$.
$-8 \notin [-7 ; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = -8$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1 ; 3]$.
Donc l'équation $g(x) = -8$ a une solution unique α et cette solution est dans l'intervalle $[-4 ; -2]$.

On peut trouver une valeur approchée de α en utilisant des tableaux de valeurs de la calculatrice :



$-11,23 < -8 < -7$
donc
$-3,6 < \alpha < -3,5$

$-8,231 < -8 < -7,817$
donc
$-3,53 < \alpha < -3,52$

On en déduit que : dans l'intervalle $[-4 ; 3]$ l'équation $2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 = 0$ a une solution unique α et on a $\quad \alpha \approx -3,52$.