EXERCICE 1

Une entreprise vend quatre types de produits notés P_1, P_2, P_3 et P_4.

La matrice des commandes de trois clients notés X, Y et Z est $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5 & 15 \\ 13 & 0 & 12 & 5 \\ 2 & 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}$ les lignes étant relatives aux clients et les colonnes aux produits.

1. Effectuer le produit $C \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat.
2. Effectuer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times C$ et interpréter le résultat.
3. Les prix unitaires de chacun des quatre produits sont respectivement 45 €, 15 €, 20 € et 30 €.
   Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant en euros de la commande de chacun des clients.

EXERCICE 2

Une usine fabrique deux articles A et B à partir de quatre composants différents C_1, C_2, C_3 et C_4. La fabrication de chacun des composants nécessite trois ressources X, Y et Z (*par exemple travail, matières premières et énergie*).
Les deux tableaux suivants présentent les quantités de composants utilisées pour produire un article A et un article B et les quantités de ressources, exprimées dans la même unité, nécessaires à la fabrication de chaque composant.

	C_1	C_2	C_3	C_4
A	3	2	2	1
B	4	3	0	2

	X	Y	Z
C_1	10	15	3
C_2	15	18	8
C_3	1	6	2
C_4	4	11	2

1. À l'aide d'un produit de matrices, calculer les quantités de chaque ressource intervenant dans la fabrication de chaque article.
2. À l'aide d'un produit de matrices, calculer les quantités de ressources nécessaires à la production de 1 300 articles A et 800 articles B.

EXERCICE 3

Calculer les produits suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 14 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{4}{3} \\ -3 & -1 & \frac{5}{3} \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B :

— la fabrication d'un article A nécessite 6 unités de matières premières, 4 unités de main d'œuvre et 1 unité d'énergie ;

— la fabrication d'un article B nécessite 9 unités de matières premières, 3 unités de main d'œuvre et 2 unités d'énergie.

1. On note $C = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 80 \end{pmatrix}$ la matrice ligne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (*matières premières, main d'œuvre et énergie*).
   Calculer sous forme d'un produit de matrices, la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} p_A & p_B \end{pmatrix}$ des prix de revient des produits A et B.
2. Le bénéfice est égal à 20% du prix de revient sur le produit A et à 25% du prix de revient sur le produit B.
   a) Déterminer les éléments de la matrice carrée M telle que la matrice ligne $V = \begin{pmatrix} v_A & v_B \end{pmatrix}$ des prix de vente de chaque article soit égale au produit des deux matrices P et M.

b) Calculer V.

3. L'entreprise reçoit une commande de 100 produits A et 80 produits B. Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

EXERCICE 5

Pour la fabrication de deux produits A et B, on distingue quatre facteurs techniques de production : des unités de matières premières, des unités de conditionnement, des unités de main d'œuvre et des unités d'énergie.
Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'une unité de produit A et à celle d'une unité de produit B ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces facteurs.

Facteurs techniques	Produit A	Produit B	Coût de revient unitaire du facteur (en euros)
Nombre d'unités de matières premières	5	6	3
Nombre d'unités de conditionnement	3	4	1
Nombre d'unités de main d'œuvre	4	3	4
Nombre d'unités d'énergie	1	2	2

La marge bénéficiaire sur chaque produit A et B est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 30 % pour le produit A et à 35 % pour le produit B.

On considère les matrices suivantes :

— $F = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux produits A et B.

— U dont les éléments sont les coûts unitaires des facteurs de production.

— C dont les éléments sont les coûts de production des deux produits A et B.

— V dont les éléments sont les prix de vente des deux produits A et B.

1. Déterminer les éléments de la matrice U de façon à ce que le produit des matrices F et U soit égal à la matrice C des coûts de production. Calculer la matrice C.
2. Déterminer les éléments de la matrice carrée M telle que la matrice V des prix de vente soit égale au produit des deux matrices M et C. Calculer V.
3. Un client commande 150 unités de produit A et 200 unités de produit B.
   Á l'aide d'un produit de matrices, calculer le montant total (en euros) de la commande.

EXERCICE 6

Soit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels non nuls.
Déterminer les éléments de la matrice J telle que $M = aI_2 + bJ$.

EXERCICE 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, en déduire l'inverse de la matrice A.
2. Calculer A^3 et A^4. Quel est l'inverse de la matrice A^2 ?

EXERCICE 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 2 & -1 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}$

Calculer le produit AB. Peut-on conclure que B est l'inverse de A?

EXERCICE 9

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Soit $D = P^{-1}MP$, calculer D et D^2.
3. Vérifier que $M^2 = PD^2P^{-1}$.
4. On admet que pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Calculer M^5.

EXERCICE 10

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.
2. Calculer M^2.
3. En déduire A^2.

EXERCICE 11

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.

EXERCICE 12

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer D^2, D^3 et D^4.
4. Calculer A^2, A^3 et A^4.

EXERCICE 13

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire A^6 puis A^{3n} où n est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de la matrice A^3.
4. a) Développer le produit $(A - I_3) \times \left(A^2 + AI_3 + {I_3}^2\right)$.
   b) En déduire l'inverse de la matrice $B = A - I_3$

EXERCICE 14

On se place dans le cas d'une économie fermée à deux branches A et B.
Une partie de la production de chaque branche ne sert pas directement à la consommation finale, chaque branche utilisant des consommations intermédiaires de production pour produire.
On suppose que :

— La production d'une unité de la branche A consomme 0,1 unité de production du secteur A et 0,4 unité de production du secteur B.

— La production d'une unité de la branche B consomme 0,3 unité de production du secteur A et 0,2 unité de production du secteur B.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice des coefficients techniques. $X = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}$ est la matrice production des productions totales exprimées en unité monétaire de chaque branche et $D = \begin{pmatrix} d_A \\ d_B \end{pmatrix}$ est la matrice demande des consommations finales exprimées en unité monétaire de chaque branche.
On considère dans tout l'exercice que X, A et D vérifient l'égalité matricielle :

$$\underbrace{X}_{\text{Production totale}} = \underbrace{AX}_{\text{Consommations intermédiaires}} + \underbrace{D}_{\text{Consommations finales}}$$

1. On suppose dans cette question que la production totale p_A de la branche A est de 400 unités monétaires et que la production totale p_B de la branche B est de 500 unités monétaires.
   a) Déterminer les consommations intermédiaires de chacune des deux branches.
   b) Quelles sont les consommations finales de chacune des deux branches ?
2. On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2. La matrice $I_2 - A$ est inversible et $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que $X = (I_2 - A)^{-1} D$.
   b) Si la demande des consommations finales en unité monétaire est $D = \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \end{pmatrix}$, quelle doit être la production de chaque branche pour satisfaire la demande des consommations finales ?

EXERCICE 15

Une économie fictive est structurée en trois secteurs A, B et C (*par exemple Agriculture, Industrie et Services*).
Une partie de la production de chaque secteur ne sert pas directement à la **consommation finale** des consommateurs. En effet, chaque secteur utilise une part de la production des différents secteurs pour travailler, il s'agit des **consommations intermédiaires**.
On considère dans tout l'exercice que :

— la production d'une unité du secteur A consomme 0,1 unité de production du secteur A, 0,2 unités de production du secteur B et 0,1 unité de production du secteur C ;

— la production d'une unité du secteur B consomme 0,3 unités de production du secteur A et 0,25 unités de production du secteur B et 0,2 unités de production du secteur C ;

— la production d'une unité du secteur C consomme 0,2 unités de production du secteur B et 0,2 unités de production du secteur C ;

— la production totale de chaque secteur est la somme de toutes les consommations intermédiaires et de la consommation finale des consommateurs.

1. On suppose dans cette question que le vecteur colonne des productions totales de chacun des trois secteurs est $P = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$.
   a) À l'aide d'un produit de matrices, calculer le vecteur colonne des consommations intermédiaires de chacun des trois secteurs.
   b) Quelles sont les consommations finales des consommateurs de chacun des trois secteurs ?
2. On suppose dans cette question que la demande des consommations finales est de 81 unités du secteur A, 144 unités du secteur B et 108 unités du secteur C.
   Déterminer la production totale de chaque secteur pour satisfaire la demande des consommations finales ?

EXERCICE 16

Les 1500 salariés d'une entreprise sont répartis dans trois services A, B et C. Pour rééquilibrer les effectifs des trois services, il a été décidé que :

— 10% des salariés du service B seront affectés au service C.

— 5% des salariés du service A seront affectés au service B et 15% au service C.

Après cette restructuration, le nombre de salariés du service B a diminué de 15 personnes et 159 salariés ont été mutés dans le service C.
On note x, y et z le nombre de salariés respectifs des trois services A, B et C avant la restructuration.
Calculer les effectifs de chaque service après la restructuration.

EXERCICE 17

Dans une entreprise de 60 personnes, le salaire moyen mensuel des employés est de 1500 €, celui des techniciens est de 2600 € et celui des cadres de 4200 €.
La masse des salaires versés chaque mois par cette entreprise est de 114 000 €.
Si on augmente de 6,4% le salaire des employés et de 4,5% celui des cadres et techniciens alors la masse des salaires mensuels augmente de 5,6%.
Quel est l'effectif de chaque catégorie de salariés de cette entreprise ?

EXERCICE 18

Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative est la parabole $\mathscr{C}_f$ passant par les points $A(-1;-3)$, $B(3;-5)$ et $C(4;-13)$.

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=ax^2+bx+c$.
Déterminer les réels a, b et c sachant que $f(2)=0$, $f(-1)=3$ et $f'(1)=-3$.

EXERCICE 20

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$.
La parabole $\mathscr{P}$ passe par le point $A(1;2)$ et coupe la droite d d'équation $y=-2x+3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2.
Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.

EXERCICE 21

Une commune met en place un nouveau service internet par abonnement. L'abonnement d'une durée de un an est renouvelable à la fin de chaque année.
On suppose que l'effectif de la population concernée par ce service n'évolue pas et est égal à 50 000.
On estime que chaque année, 79% des abonnés renouvelleront leur abonnement en fin d'année et que 4% des non abonnés d'une année s'abonneront l'année suivante.
On note a_n le nombre d'abonnés la n-ième année et b_n le nombre de personnes qui ne sont pas abonnés la n-ième année.
On pose $a_0=0$ et $b_0=50000$

1. Soit n un entier naturel. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction a_n et b_n.
2. Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}0{,}79 & 0{,}04\\0{,}21 & 0{,}96\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.
   Vérifier que $X_{n+1}=AX_n$.
3. On pose $P=\begin{pmatrix}4 & 1\\21 & -1\end{pmatrix}$. Vérifier que $P^{-1}=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}1 & 1\\21 & -4\end{pmatrix}$
4. a) On pose $D=P^{-1}AP$. Calculer D et D^2.
   b) Montrer que $A^2=PD^2P^{-1}$.
5. On admet que, pour tout entier n strictement positif, $A^n=PD^nP^{-1}$, $D^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}75^n\end{pmatrix}$ et $X_n=A^nX_0$.
   a) Calculer A^n.
   b) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de la suite (a_n) et interpréter ce résultat.
   d) Calculer la somme a_n+b_n

EXERCICE 22

On considère les matrices $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

PARTIE A

1. Calculer D^2 et D^3.
2. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
3. Soit A la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Calculer A.
4. Montrer que $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$ et $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$.

1. Pour tout entier n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   a) Donner V_0 et V_1.
   b) Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.
2. On admet que pour tout entier n, $V_n = A^n \times V_0$ où $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $P \times D^6$.
   b) Calculer V_6.
   c) En déduire les valeurs de u_6 et u_7.