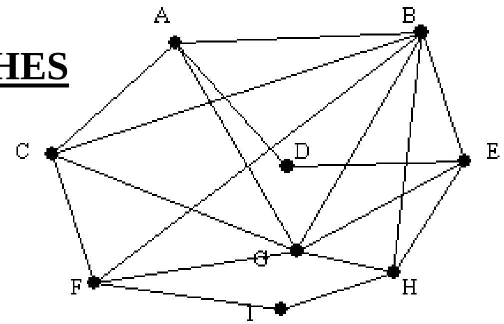
GRAPHES

Exercice n°1.
Déterminer le degré de chacun des sommets du graphe suivant :



Exercice n°2.
Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue!).

1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant *i* et *j* signifie que *i* espionne *j* que et *j* espionne *i*.
2) Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?
3) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

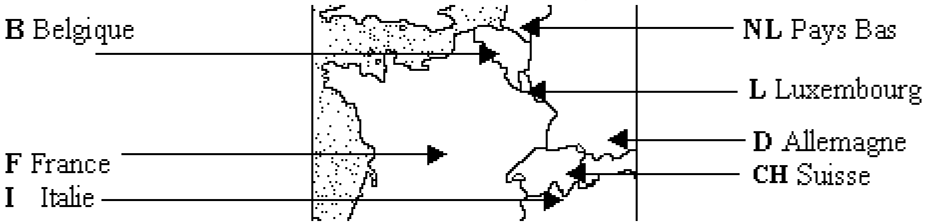
Exercice n°3. Peut-on construire un graphe simple (aucune arête n'est une boucle et il y a au plus une arête entre deux sommets) ayant :
a) 4 sommets et 7 arêtes b) 5 sommets et 11 arêtes c) 10 sommets et 46 arêtes

Exercice n°4. Etant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de *i*	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

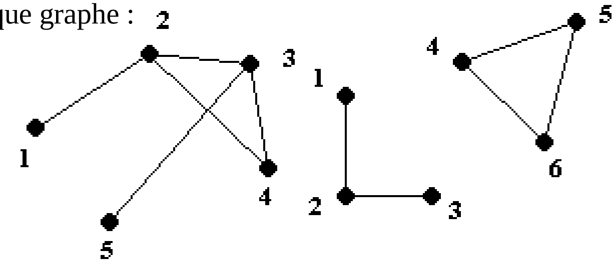
1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets *i* et *j* signifie qu'il y a une relation d'amitié entre *i* et *j*.
2) Ce graphe est-il complet ? connexe ?
3) Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

Exercice n°5. Sur la carte suivante sont désigné 7 pays européens :



1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 7 dans lequel l'existence d'une frontière entre deux pays se traduira par une arête.
2) Combien de couleurs faut-il, au minimum, pour colorier cette graphe, de sorte que deux pays frontaliers ne soient pas affectés de la même couleur.

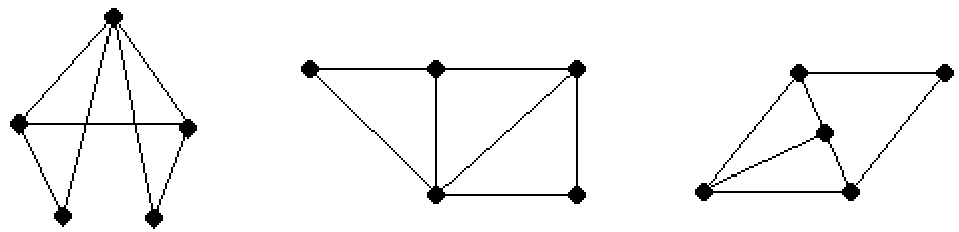
Exercice n°6.
Ecrivez la matrice associé à chaque graphe :



Exercice n°7.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

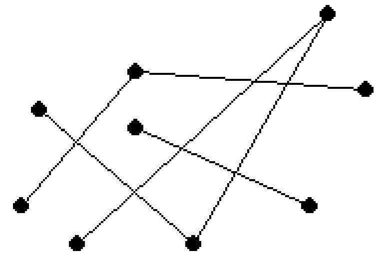
Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à A ?



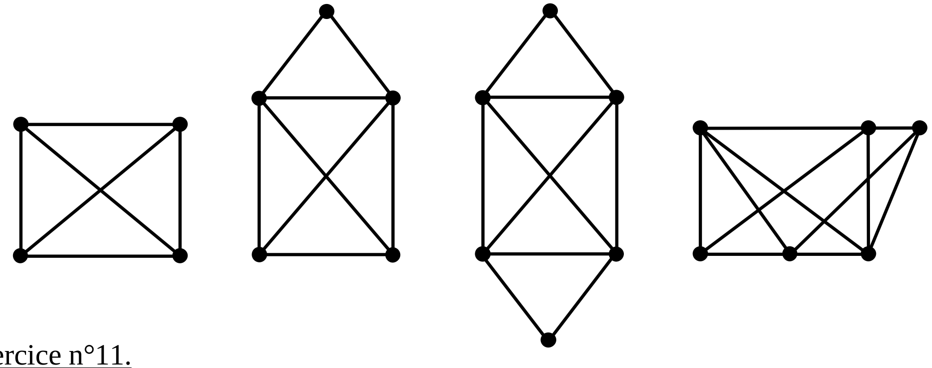
Exercice n°8. Dessiner un graphe dont une matrice serait : (plusieurs solutions sont évidement possibles)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

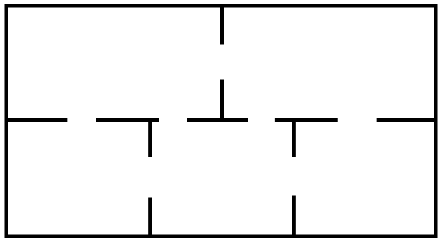
Exercice n°9.
Transformer ce graphe en lui rajoutant un nombre minimal d'arêtes pour qu'il soit connexe.

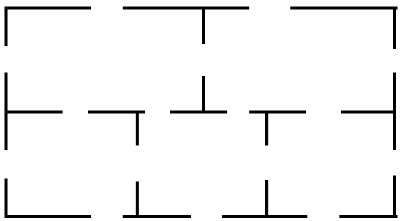


Exercice n°10. Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait!…)? Pourquoi ?

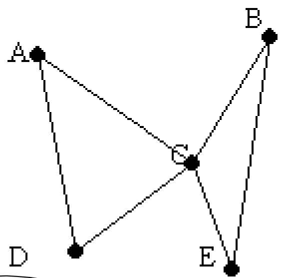


Exercice n°11.
Est-il possible de se promener dans chacune de ces maisons en passant une et une seule fois par chacune de ses ouvertures ?

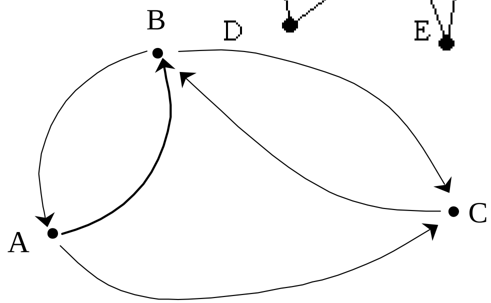




Exercice n°12.
Le chasse neige doit déblayer les 6 routes qui relient 5 villages A, B, C, D et E
Peut on trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une et une seule fois chaque route ?
a) en partant de E et en terminant par E
b) en partant de C et en terminant à D
c) en partant de A et en terminant à A

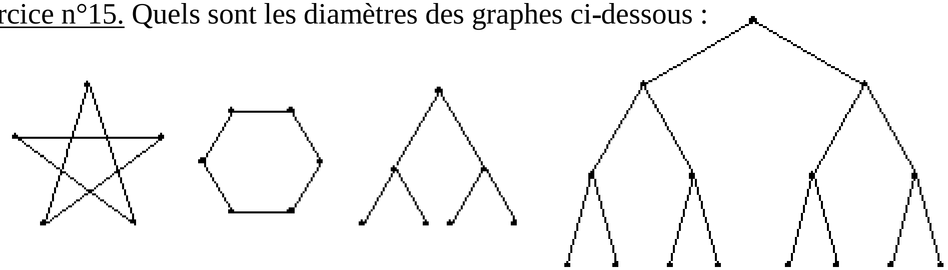


Exercice n°13.
Considérons le graphe G ci-contre :
Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 4 entre A et B ? B et A ? B et B ?

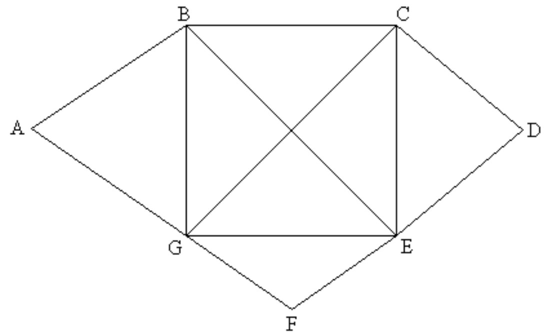


Exercice n°14.
On considère quatre villes V_1 , V_2 , V_3 , V_4 dans un pays où le traffic aérien est encore très réduit : il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4, de V_2 vers V_3, de V_3 vers V_1 et vers V_4, de V_4 vers V_2
1) Représenter les données par un graphe convenable.
2) Vérifier qu'il existe au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j, $i \neq j$, comportant au plus deux escales.
3) a) Ecrivez la matrice M associée à ce graphe.
b) Calculez M^2 et M^3
c) Retrouvez alors le résultat de la question 2)

Exercice n°15. Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous :



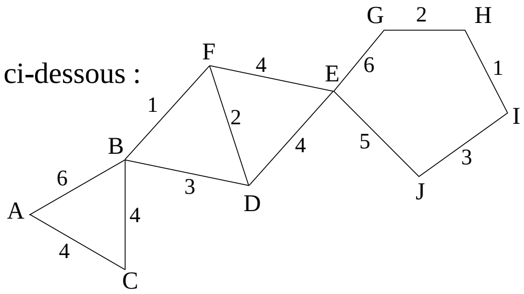
Exercice n°16. Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :
AB : 16 minutes ; AG = 12 minutes ; BC = 8 minutes ; BE : 12 minutes;
BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes; CE = 4 minutes ; CG : 10 minutes ;
DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ; FG : 8 minutes.
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens du parcours.
1) Montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.

2) L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.
3) Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D. En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

<u>Exercice n°17.</u> On considère le graphe ci-dessous :



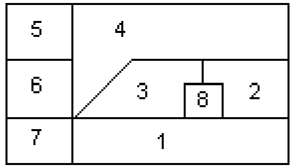
1) Existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ? Si oui indiquez-en un(e)
2) Donner une plus courte chaîne allant de A à I.

<u>Exercice n°18.</u>
Au 1er janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10% des propriétaires deviennent locataires tandis que 20% des locataires deviennent propriétaires.
1) On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année 2000+n (n entier supérieur ou égal à 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire. La matrice P_0 = (0,5 0,5) traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.
a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste , puis donner sa matrice de transition M
b) Calculer l'état probabiliste P_1.
c) Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
2) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n,
$p_{n+1} = 0,7\,p_n + 0,2$
3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$
a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
b) Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times (0,7)^n + \dfrac{2}{3}$
c) Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1) c)

<u>Exercice n°19.</u>
Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.
1) Dessiner un graphe décrivant cette situation.
2) écrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
3) En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A. Calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004.
4) L'état (0,5 ; 0,5) est-il stable ? Justifier cette réponse.

Exercices et problèmes de synthèse

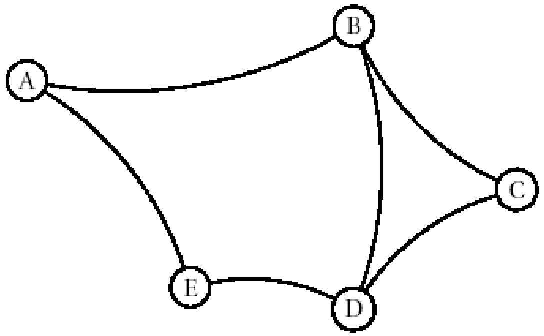
<u>Exercice n°20.</u>
Huit pays sont représentés ci-dessous avec leur frontière (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme voisins)



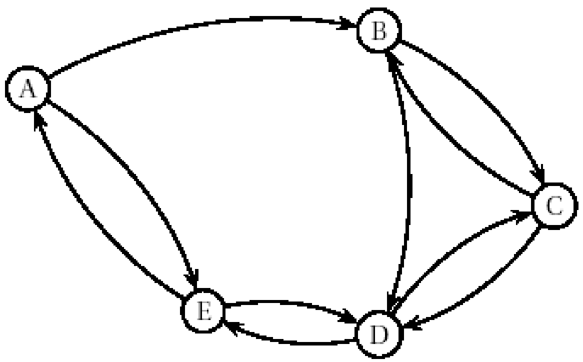
1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les pays et les arêtes les frontières.
2) a) Ce graphe est-il complet ? connexe ?
b) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes ?
3) a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?
b) Quel est le diamètre du graphe ?
4) a) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ?
b) est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ?
5) Quel est le nombre maximum de pays sans frontière commune ? Précisez de quels pays il s'agit
6) Colorez les huit pays avec un nombre minimum de couleurs de telle façon que deux pays adjacents portent deux couleurs différentes

Exercice n°21.

1) Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.
On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :



a) On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier. Déterminer ce nombre.
b) Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?
2) Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. Le graphe G' ci-dessous modélise cette nouvelle situation :



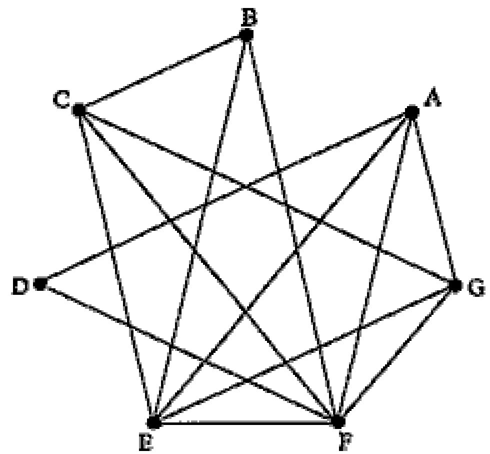
a) Donner la matrice M associée au graphe G'. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

b) On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B? Les donner tous.
c) Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A. Quel est ce cycle ? En est-il de même pour le sommet B?

Exercice n°22.

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle.
A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle.
Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1) Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
2) Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?
Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?
3) Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.
4) Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe G figurant en annexe.
5) Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Exercice n°23.
Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \quad 0{,}7)$.
4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.
5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
a. Déterminer a et b.
b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.