GRAPHES - CORRECTION

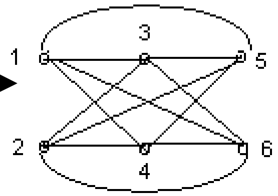
Exercice n°1

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	6	4	2	4	4	6	4	2

Exercice n°2

Les espions d'un même pays sont notés 1 et 2 , 3 et 4, 5 et 6

1) Graphe



2) Ce graphe n'est pas complet car deux espions d'un même pays ne s'espionnent pas, donc les sommets correspondants ne sont pas adjacents.

En revanche ce graphe est connexe car entre tout couple de points, il existe au moins une chaîne

3) Les sommets sont tous de degré 4 car chaque espion en espionne quatre autres

Autrement dit :

Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	4	4	4	4	4	4

La somme des degrés étant égale au double du nombre d'arêtes, celui-ci vaut 12

Exercice n°3

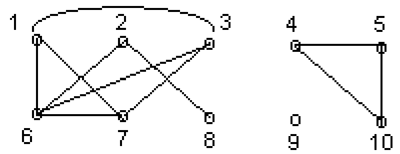
a) Si le graphe simple contient 4 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 3, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 12. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 6, donc ne peut pas être égal à 7.

b) Si le graphe simple contient 5 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 4, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 20. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 10, donc ne peut pas être égal à 11.

b) Si le graphe simple contient 10 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 9, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 90. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 45, donc ne peut pas être égal à 46.

Exercice n°4

1)

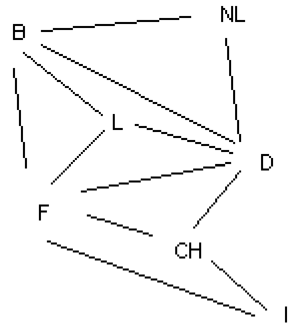


2) Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, 1 et 2 ne sont pas adjacents. Il n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant 3 et 4. En revanche, il admet deux sous graphes connexes (1,2,3,6,7,8) (4,5,10) et un point isolé 9

3) Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié la composante connexe (1,2,3,6,7,8) serait complète

Exercice n°5

1)



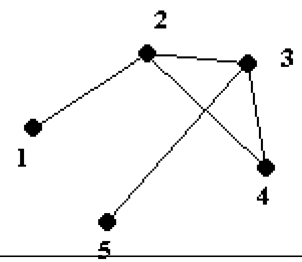
2) Il faut procéder à une coloration du graphe

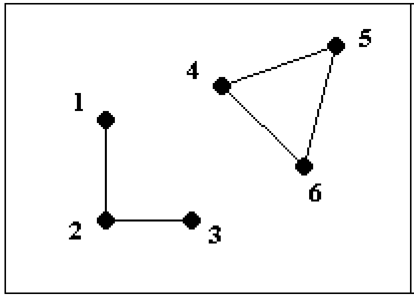
Le sommet de plus fort degré est F ou D, de degré 5. Le sous-graphe complet d'ordre maximal est d'ordre 3, par exemple B,L,F,D. Le nombre chromatique χ vérifie donc $4 \leq \chi \leq 5+1$, c'est-à-dire $4 \leq \chi \leq 6$

Classons les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré et appliquons l'algorithme de coloration de Welch et Powell

Degré	Sommet	Couleur
5	D	Couleur 1
5	F	Couleur 2
4	B	Couleur 3
3	CH	Couleur 4
3	L	Couleur 3
2	I	Couleur 1
2	NL	Couleur 2

Exercice n°6

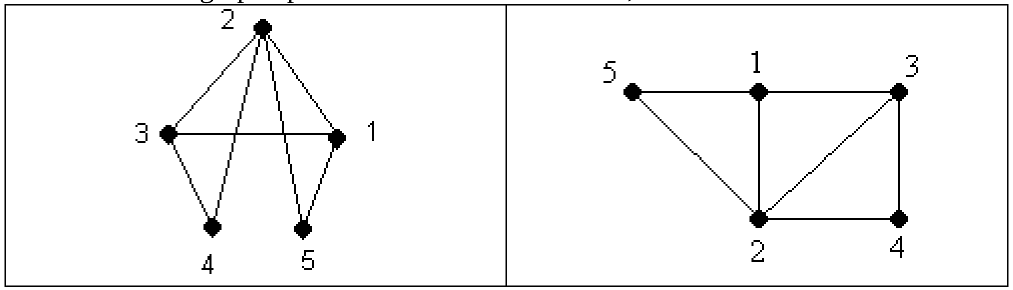
Graphe	Matrice
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n°7

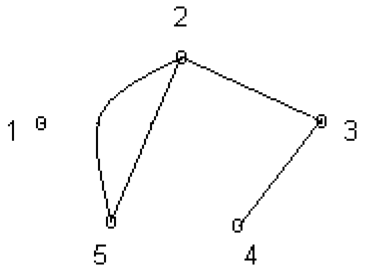
Le 1[er] et le 3[ème] graphe peuvent associés à la matrice, avec les numérotations :



Le deuxième ne possède pas de sommet de degré égal à 4 (« 2 »)

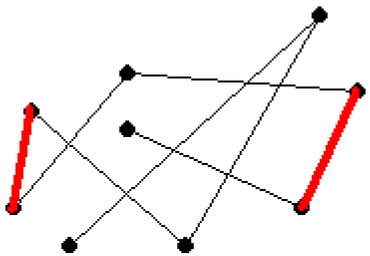
Exercice n°8

Un graphe possible est :



Exercice n°9

En rajoutant deux arêtes (en rouge), on peut rendre ce graphe connexe



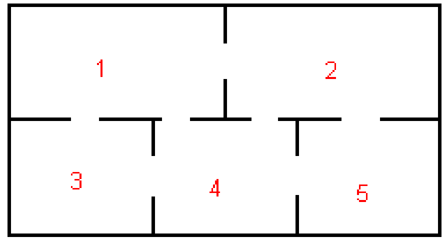
Exercice n°10

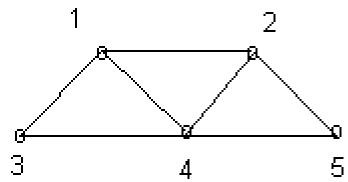
Tracer les figures « sans lever » le crayon revient à exhiber une chaine eulérienne. Or ceci n'est possible que si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 (on aura affaire à un cycle eulérien, donc le retour se fera sur le sommet de départ) ou à 2. Pour le premier graphe, c'est impossible, tous les sommets étant de degré impairs. Pour les trois autres graphes, c'est possible.

En ce qui concerne le 3[ème] graphe, tous les sommets étant de degré pair, on a même l'existence d'un cycle eulérien.

Exercice n°11

En numérotant les pièces et en matérialisant les portes par des arêtes, on traduit la situation par le graphe ci-dessous :

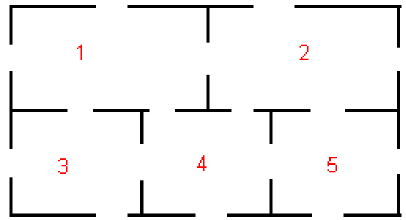


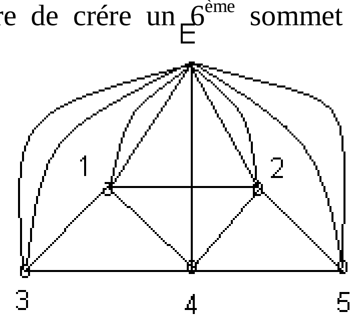


Se promener dans la maison en passant par chacune des ouvertures revient à chercher l'existence d'une chaîne eulérienne

Seuls deux sommets étant de degré impairs (1 et 2) , les autres étant de degré pair, il est possible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

Pour la deuxième situation, il est nécessaire de crére un 6[ème] sommet nommé « extérieur » (E)





Il existe maintenant quatre sommets de degré impairs (1,2,4 et E) , les autres étant de degré pair, il est impossible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

Exercice n°12

Trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une seule fois chaque route revient à trouver une chaîne eulérienne (voire un cycle) associée à ce graphe.

Tous les sommets étant de degré pair, le théorème d'Euler assurer l'existence d'un cycle eulérien (donc d'une chaîne eulérienne)

a) E-C-D-A-C-B-E est un exemple.

b) il n'existe pas de chaîne eulérienne partant de C et en terminant à D

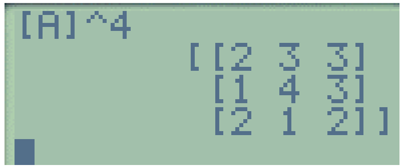
c) A-D-C-E-B-C-A est un exemple.

Exercice n°13

En numérotant 1,2,3 les sommets A,B,C, La matrice associée à ce graphe est

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ (attention, le graphe n'étant pas orienté, la matrice n'est pas symétrique)

On calcule $A^4=\begin{pmatrix}2&3&3\\1&4&3\\2&1&2\end{pmatrix}$

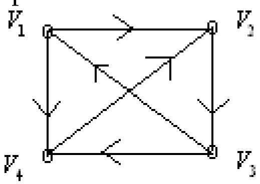


La matrice A^4 nous permet d'affirmer qu'il existe :

- 3 chaînes de longueur 4 entre A et B
- 1 chaînes de longueur 4 entre B et A
- 4 chaînes de longueur 4 entre B et B

Exercice n°14

1) Les sommets du graphes étant les villes, et les arêtes étant les liaisons, un graphe représentant la situation est :



Il existe au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j, $i\neq j$, comportant au plus deux escales, car le diamètre du graphe est égal à 3

3) a) La matrice M associée à ce graphe est $M=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

b) On calcule $M^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ et $M^3=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&1\\0&1&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

c) On calcule :

$$M+M^2+M^3=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&1\\0&1&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\1&2&1&2\\1&3&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice ne comportant pas de 0, et ne comportant que des entiers inférieurs ou égaux à 3, il existe toujours une chaine de longueur au plus égale à 3 entre deux aéroports, c'est-à-dire un voyage comportant au plus deux escales. On retrouve le résultat précédent.

Exercice n°15

Le premier graphe a pour diamètre 2

Le deuxième graphe a pour diamètre 3

Le troisième graphe a pour diamètre 4

Le quatrième graphe a pour diamètre 6

Exercice n°16

1) Puisque seuls les sommets E et G sont de degré impairs, ce graphe admet une chaîne eulérienne. Il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Un exemple de trajet est EGCBECDEFGBAG

2) L'agent de sécurité ne peut pas revenir à son point de départ car le théorème d'Euler interdit l'existence d'un cycle eulérien, en raison des deux sommets E et G de degré impair.

3) On détermine le temps minimum de parcours grâce à l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	Sommet choisi
0	0+16 =16 (A)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0+12 =12 (A)	**G (12)**
$+\infty$	12+8 =20 (G)	12+10 =22 (G)	$+\infty$	12+15 =27 (G)	12+8 =20 (G)	$+\infty$	~~F (20)~~ **C(22)**
$+\infty$			22+7 =29 (C)	~~20+8=28 (F)~~ 22+4=26 (C)			~~D(29)~~ **E(26)**
$+\infty$			26+2 =28 (E)				**D(28)**

On trouve pour chemin minimum le chemin AGCED, de poids 28

Exercice n°17

1) Les sommets D et F sont de degré impair, et tous les autres de degré pair. On conclut, grâce au théorème d'Euler, à l'existence d'une chaîne eulérienne, mais pas à celle d'un cycle eulérien.
Une chaîne eulérienne est, par exemple, DBCABFDEGHIJEF

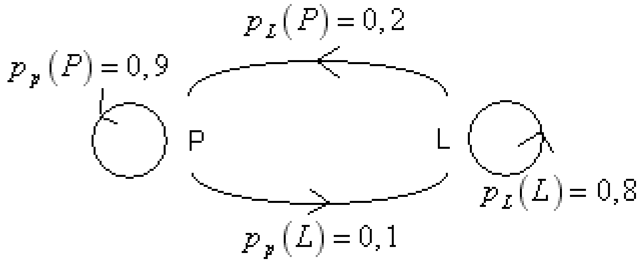
2) On détermine le temps minimum de parcours grâce à l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sommet choisi
0	0+6 =6(A)	0+4 =4(A)								~~C(4)~~ B(6)
	~~4+4 =8(B)~~									
					6+1 =7(B)					F(7)
			7+2 =9(F)	7+4 =11(F)						~~D(9)~~ E(11)
				~~9+4 =13(D)~~						
						11+6 =17(E)			11+5 =16(E)	J(16)
								16+3 =19(J)		I(19)

On trouve pour chemin minimum le chemin ABFEJI, de poids 19

Exercice n°18

1) a) Si on note P la probabilité d'être propriétaire, et L celle d'être locataire, l'énoncé fournit les indications $p_p(P)=0,9$, $p_p(L)=0,1$, $p_L(P)=0,2$ et $p_L(L)=0,8$
la situation se traduit par le graphe probabiliste :



La matrice de transition de ce graphe est $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$

b) On calcule

$$P_1=P_0M=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5\times0,9+0,5\times0,2 & 0,5\times0,1+0,5\times0,8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}$$

c) L'état stable $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ de ce graphe vérifie $x+y=1$ et

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,9x+0,2y\\ y=0,1x+0,8y\end{cases}$$

En utilisant la relation $x+y=1$, le système devient donc

$$\begin{cases}-0,1x+0,2y\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-0,1x+0,2(1-x)=0\\ y=1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,3x=0,2\\ y=1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{0,2}{0,3}=\dfrac{2}{3}\\ y=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

L'état stable du graphe est donc $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On peut ainsi conclure qu'au bout d'un grand nombre de mois, le nombre de propriétaires tend vers une proportion de $\frac{2}{3}$, tandis que celui des locataires tend vers une proportion de $\frac{1}{3}$.

2) À l'aide de la relation $P_{n+1}=P_n\times M$, on écrit :

$$\begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}p_{n+1}=0,9p_n+0,2q_n\\ q_{n+1}=0,1p_n+0,8q_n\end{cases}$$

En utilisant la relation $p_n+q_n=1$, on déduit que $p_{n+1}=0,9p_n+0,2(1-p_n)$
$\boxed{\Leftrightarrow p_{n+1}=0,7p_n+0,2}$

3) Pour tout entier n, on a $u_{n+1}=0,7p_n+0,2-\frac{2}{3}=0,7p_n-\frac{7}{15}=0,7\left(p_n-\dfrac{7/15}{7/10}\right)$

C'est-à-dire $u_{n+1}=0,7u_n$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,7, et de premier terme $u_0=p_0-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$

b) Ainsi, pour tout entier n, $u_n = \left(-\dfrac{1}{6}\right) \times 0,7^n$, et puisque $u_n = p_n - \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow p_n = u_n + \dfrac{2}{3}$, on en déduit que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times (0,7)^n + \dfrac{2}{3}$

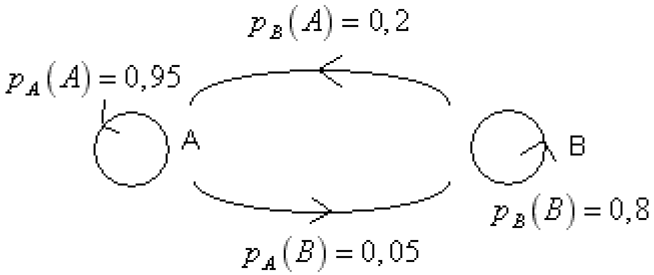
c) Puisque $0 < 0,7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,7)^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{2}{3}$

On retrouve le résultat de la question 1) c)

Exercice n°19

1) Si on note A la probabilité pour un hôtel d'être classé dans la catégorie A, et B celle d'être classée dans la catégorie B, l'énoncé fournit les indications $p_A(A) = 0,95$, $p_A(B) = 0,05$, $p_B(A) = 0,2$ et $p_B(B) = 0,8$

la situation se traduit par le graphe probabiliste :



2) La matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3) L'état de l'année 2003 sera égal à :

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25\times 0,95 + 0,2\times 0,75 & 0,25\times 0,05 + 0,75\times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3875 & 0,6125 \end{pmatrix}$$

L'état de l'année 2004 sera égal à :

$$\begin{pmatrix} 0,3875 & 0,6125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3875\times 0,95 + 0,6125\times 0,2 & 0,3875\times 0,05 + 0,6125\times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,490625 & 0,509375 \end{pmatrix}$$

4) L'état $= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas stable car

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

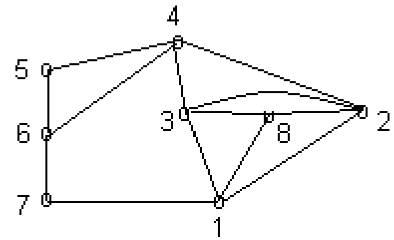
$$= \begin{pmatrix} 0,5\times 0,95 + 0,5\times 0,2 & 0,5\times 0,05 + 0,5\times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,575 & 0,425 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

<u>Exercices et problèmes de synthèse</u>

Exercice n°20

1) Une représentation possible peut être :



2) a) Ce graphe n'est pas complet (2 et 6 ne sont pas adjacents) mais est connexe.

b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

La somme des degrés vaut 4+4+4+4+2+3+2+3=26. Il y a donc 13 arêtes

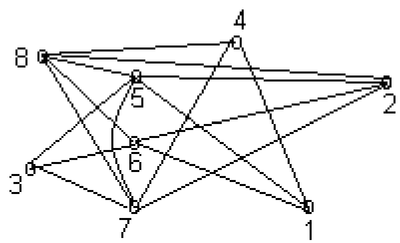
3) a) La distance entre les sommets 1 et 5 vaut 3

b) Ce graphe a pour diamètre 3

4) a) Puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien, donc il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.

b) Puisque deux sommets exactement sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne, donc il est possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays.

5) On doit construire un nouveau graphe ou deux pays seront adjacents s'ils n'ont pas de frontière commune



Le plus grand sous-graphe complet de ce graphe a pour ordre 3

Le nombre maximum de pays sans frontière commune est donc égal à 3

6) Le degré maximum étant égal à 4, et le plus grand sous graphe complet étant d'ordre 4 (1,2,3,8), le nombre chromatique χ du graphe vérifie $4 \leq \chi \leq 5$

On applique l'algorithme de coloration de Welch et Powell

Sommet	Degré	Couleur
1	4	Couleur 1
2	4	Couleur 2
3	4	Couleur 3
4	4	Couleur 4
6	3	Couleur 1
8	3	Couleur 4
5	2	Couleur 2
7	2	Couleur 2

On déduit de cette coloration que $\chi = 4$

Exercice n°21

1) a) Notons χ le nombre chromatique de ce graphe, c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs à utiliser pour que deux bancs adjacents ne soient pas de la même couleur.
Puisque le sous-graphe BCD est complet, on aura $\chi \geq 3$ et puisque le degré maximum est égal à 3 (sommets B et D), on aura $\chi \leq 3+1$, c'est-à-dire, au final, $3 \leq \chi \leq 4$.
On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell :

Sommet	Degré	Couleur
B	3	Couleur 1
D	3	Couleur 2
A	2	Couleur 2
C	2	Couleur 3
E	2	Couleur 1

Ainsi $\chi = 3$

b) Le nombre de sommets de degré impair étant exactement égal à deux, il existe une chaîne eulérienne, donc il est possible de se promener une seule fois dans toutes allées du parc

2) a) La matrice M associée au graphe G' est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) A partir de la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

on en déduit qu'il existe 5 chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B (terme à l'intersection de la 4ème ligne et de la 2ème colonne)
Ces chemins sont DEDEAB , DEAEAB, DEABCB, DCBDCB, DCDEAB
c) D'après la matrice, il existe un seul chemin de longueur 5 reliant A à A. Ce chemin est donc l'unique cycle contenant le sommet A, car tout cycle peut être considéré dans n'importe quel ordre. Ce cycle est ABCDEA.
En revanche, il existe 5 cycles de longueur 5 contenant le sommet B.

Exercice n°22

1) La matrice associée au graphe Γ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le sous graphe AEFG est complet. Comme il est d'ordre 4, on déduit que $\chi(\Gamma) \geq 4$

3) Le sommet de plus haut degré de Γ est F, de degré 6. Ainsi $\chi(\Gamma) \leq 6+1$, et on déduit que $4 \leq \chi(\Gamma) \leq 7$

4) On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell :

Sommet	Degré	Couleur
F	6	Couleur 1
E	5	Couleur 2
G	4	Couleur 3
A	4	Couleur 4
C	4	Couleur 4
B	3	Couleur 3
D	2	Couleur 2

5) L'organisateur doit prévoir 4 parties :
Partie 1 : F
Partie 2 : E,D
Partie 3 : G,B
Partie 4 : A,C

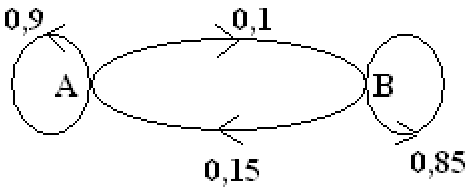
Exercice n°23

1. Puisqu'au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore, on aura $a_0 = 0,2$ donc $b_0 = 0,8$.

La matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2. Le graphe probabiliste sera constitué de deux sommets A et B origines et extrémités de deux arêtes orientées et pondérées. L'arête reliant A à B dans le sens A->B sera pondérée par la probabilité qu'une personne préférant Aurore une semaine donnée, ait changé pour Boréale la semaine suivante, soit 0,1.

On obtient ainsi :



3. a. La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets est égale à : $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}}$

b. On a :

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 & 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}}$$

4. a. Pour tout entier naturel *n*, $\boxed{P_n = P_0 M^n}$

b. Ainsi, $P_3 = P_0 M^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^3$

A l'aide d'une calculatrice, après avoir défini dans le menu MATRICE, une matrice [A], de dimension 1×2 correspondant à P_0 et une matrice [B], de dimension 2×2 correspondant à M, on calcule :

Ainsi, $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 0,43125 & 0,56875 \end{pmatrix}}$

On peut estimer qu'au bout de la 3ème semaine de campagne, plus de 43% de la population sera favorable au parfum Aurore.

5. a. L'état stable $P = (a \quad b)$ est solution de l'équation matricielle

$$P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

De surcroît, on a $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$

Les nombres *a* et *b* sont donc solutions du système $\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases}$ que l'on résout :

$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15(1 - a) \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,9a + 0,15 - 0,15a \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,25a = 0,15 \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{0,15}{0,25} \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \\ b = 1 - 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 0,6 \\ b = 0,4 \end{cases}}$$

L'état stable est donc $\boxed{P = (0,6 \quad 0,4)}$

b. On peut donc estimer qu'à terme, 60% de la population sera favorable au parfum Aurore, qui sera donc préféré au parfum Boréale