

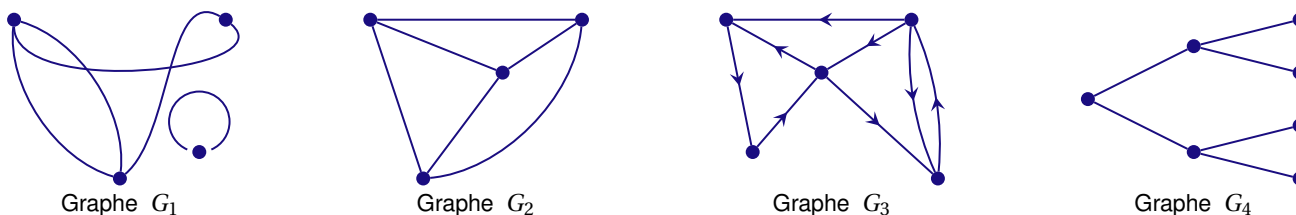
Chapitre 2

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GRAPHS

I	GRAPHES PREMIÈRES DÉFINITIONS	161
1	définitions	161
2	degré d'un sommet	162
3	représentation matricielle d'un graphe	164
4	graphes isomorphes	164
II	CHAÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ	167
1	définitions	167
2	chaînes de longueur donnée	167
3	connexité	168
4	cycle eulérien	169
	EXERCICES	172

I GRAPHS PREMIÈRES DÉFINITIONS

De manière générale, un graphe est un ensemble de sommets et d'arêtes (ou arcs) reliant ces sommets. Il existe différents types de graphes, orientés ou non, ou autorisant plusieurs arcs entre deux sommets.



1 DÉFINITIONS

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

- un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*
- un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes*.

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G , une arête a de l'ensemble A s'écrit $a = \{x_i, x_j\}$ où x_i et x_j sont les *extrémités* de a .

Les sommets x_i et x_j sont alors *adjacents* dans le graphe G et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arête a .

Lorsque les deux extrémités sont confondues ($x_i = x_j$) l'arête s'appelle une *boucle*.

Deux arêtes sont dites *parallèles* lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

ORDRE D'UN GRAPHE

On appelle ordre d'un graphe le nombre (n) de sommets de ce graphe.

Par exemple :

les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4 ; le graphe G_3 est d'ordre 5 et le graphe G_4 est d'ordre 7.

GRAPHE SIMPLE

Un graphe est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

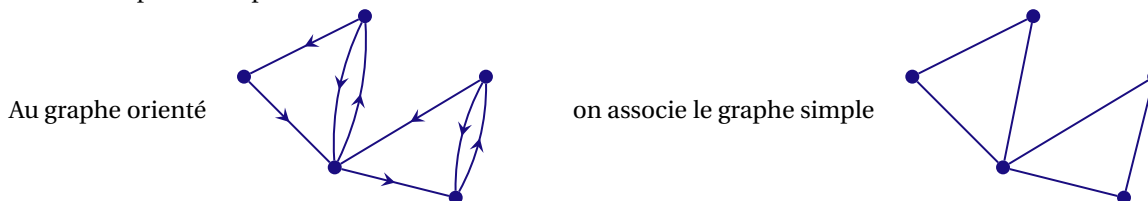
GRAPHE ORIENTÉ

Un graphe peut être orienté, une arête est alors appelée un *arc*. Un arc est défini par un couple ordonné (x_i, x_j) de sommets.

REMARQUE

À tout graphe orienté, on peut associer un graphe simple.

Par exemple sur un plan de ville où sont indiquées les rues en sens uniques, un piéton ne tiendra pas compte de l'orientation pour se déplacer.



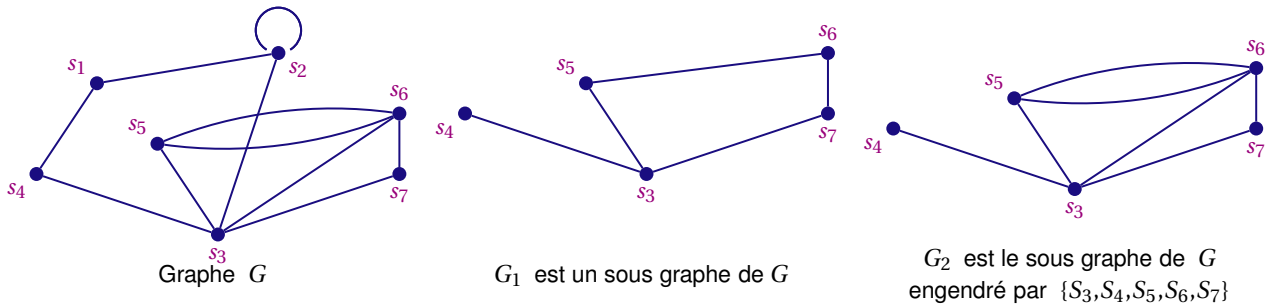
SOUS GRAPHE

Il arrive que dans certains problèmes on ait besoin de considérer une partie d'un graphe :

$G' = (S', A')$ est un sous-graphe de $G = (S, A)$ si S' est un sous ensemble de S et A' un sous ensemble de A tel que les extrémités des arêtes de A' sont des sommets de S' .

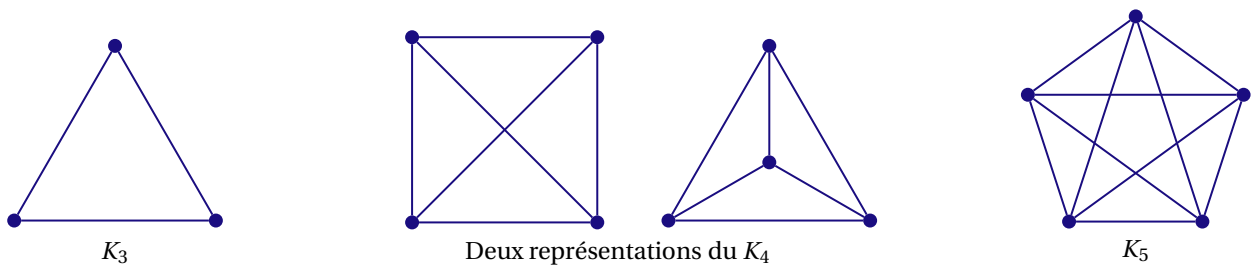
Si A' est constitué de toutes les arêtes de A ayant pour extrémités les sommets de S' alors on dit que $G' = (S', A')$ est le sous-graphe engendré par S' .

EXEMPLE



GRAPHE COMPLET

Un graphe complet K_n est un graphe simple d'ordre $n \geq 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.



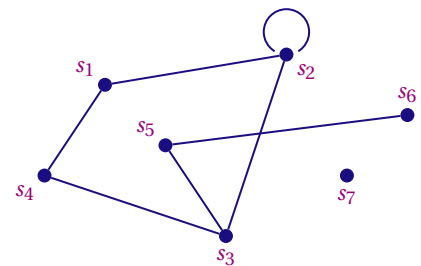
2 DEGRÉ D'UN SOMMET

On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

Sommets	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Degrés	2	4	2	3	2	1	0



DEGRÉ D'UN SOMMET DANS UN GRAPHE ORIENTÉ

Soit s un sommet d'un graphe orienté G .

- On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
- On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.

Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$$d^+(s_1) = 2 \text{ et } d^-(s_1) = 1 \text{ d'où } d(s_1) = 3$$

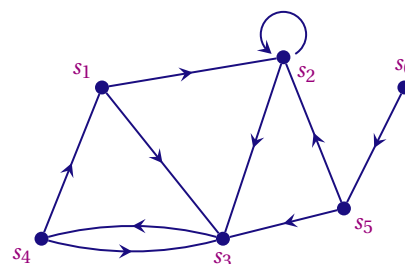
$$d^+(s_2) = 2 \text{ et } d^-(s_2) = 3 \text{ d'où } d(s_2) = 5$$

$$d^+(s_3) = 1 \text{ et } d^-(s_3) = 4 \text{ d'où } d(s_3) = 5$$

$$d^+(s_4) = 2 \text{ et } d^-(s_4) = 1 \text{ d'où } d(s_4) = 3$$

$$d^+(s_5) = 2 \text{ et } d^-(s_5) = 1 \text{ d'où } d(s_5) = 3$$

$$d^+(s_6) = 1 \text{ et } d^-(s_6) = 0 \text{ d'où } d(s_6) = 1$$



REMARQUE

Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont égales au nombre d'arcs.

Si on note a le nombre d'arcs d'un graphe orienté alors $\sum d^+(s) = \sum d^-(s) = a$.

Par exemple si dans une réunion on échange des cadeaux, le nombre de cadeaux offerts est égal au nombre de cadeaux reçus, c'est le nombre de cadeaux échangés.

THÉORÈME

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe; c'est donc un nombre pair.

* DÉMONSTRATION

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

COROLLAIRE

Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est un entier pair.

* DÉMONSTRATION

Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.

$m + p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.

Or une somme d'entiers impairs est paire si, et seulement si, il y a un nombre pair de termes.

On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair.

PROPOSITION

Dans un graphe simple d'ordre $n > 1$, il existe deux sommets distincts s_i et s_j ayant le même degré.

* DÉMONSTRATION

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 1$. Le degré d'un sommet s quelconque du graphe G est un entier $d(s)$ tel que : $0 \leq d(s) \leq n - 1$.

Supposons que les degrés des sommets soient différents.

Les degrés des n sommets sont les entiers $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ et il existe un sommet s_i de degré 0 et un sommet s_j de degré $n - 1$.

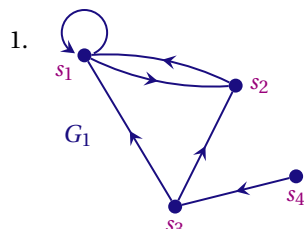
Or si $d(s_j) = n - 1$ cela signifie qu'il est adjacent à tous les sommets du graphe et en particulier au sommet s_i donc $d(s_i) \geq 1$

Ce qui est en contradiction avec $d(s_i) = 0$.

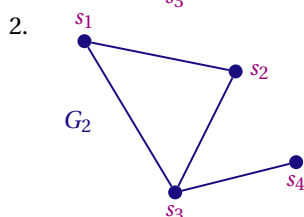
3 REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UN GRAPHE

Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .
La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j .
Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j .

EXEMPLES



La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

REMARQUES

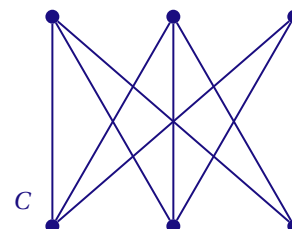
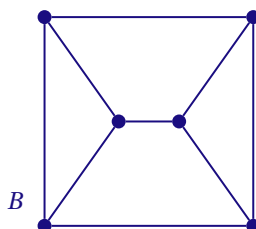
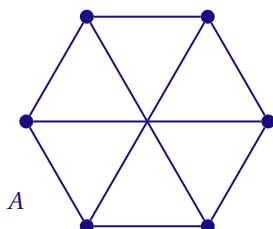
1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.
3. La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au nombre d'arêtes de ce graphe.
4. La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est égale au nombre d'arcs de ce graphe.
 - La somme des coefficients de la ligne i est égale au nombre de successeurs du sommet s_i .
 - La somme des coefficients de la colonne i est égale au nombre de prédécesseurs du sommet s_i .

4 GRAPHES ISOMORPHES

Deux graphes isomorphes ont la même structure : peu importe la façon dont ils sont dessinés, il est possible de déplacer les sommets pour que l'un soit la copie conforme de l'autre.

EXEMPLE

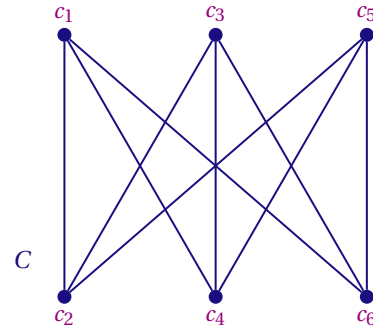
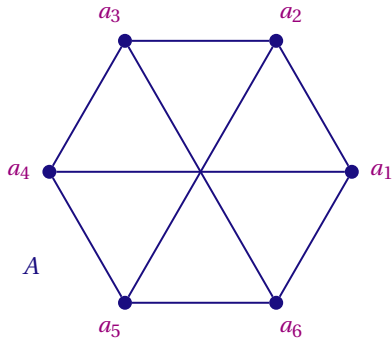
Considérons les trois graphes ci-dessous :



Les trois graphes ont le même ordre (6), le même nombre d'arêtes (9) et les sommets des trois graphes sont tous de degré 3.

Or dans B il y a deux sous graphes complets d'ordre 3 ce qui n'est pas le cas pour les graphes A et C . Donc B n'est pas isomorphe à A et C .

Montrons que les graphes A et C sont isomorphes.



Les sommets étant numérotés comme indiqué ci-dessus les deux graphes ont la même matrice d'adjacence :

$$M_A = M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A et C sont isomorphes.

REMARQUES

- Le graphe B est *planaire* : on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent.
- Le graphe C (ou A) est un graphe *biparti* : il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête du graphe a une extrémité dans X et l'autre dans Y .
Ce n'est pas un graphe planaire, il est impossible de le dessiner sans que ses arêtes se croisent.

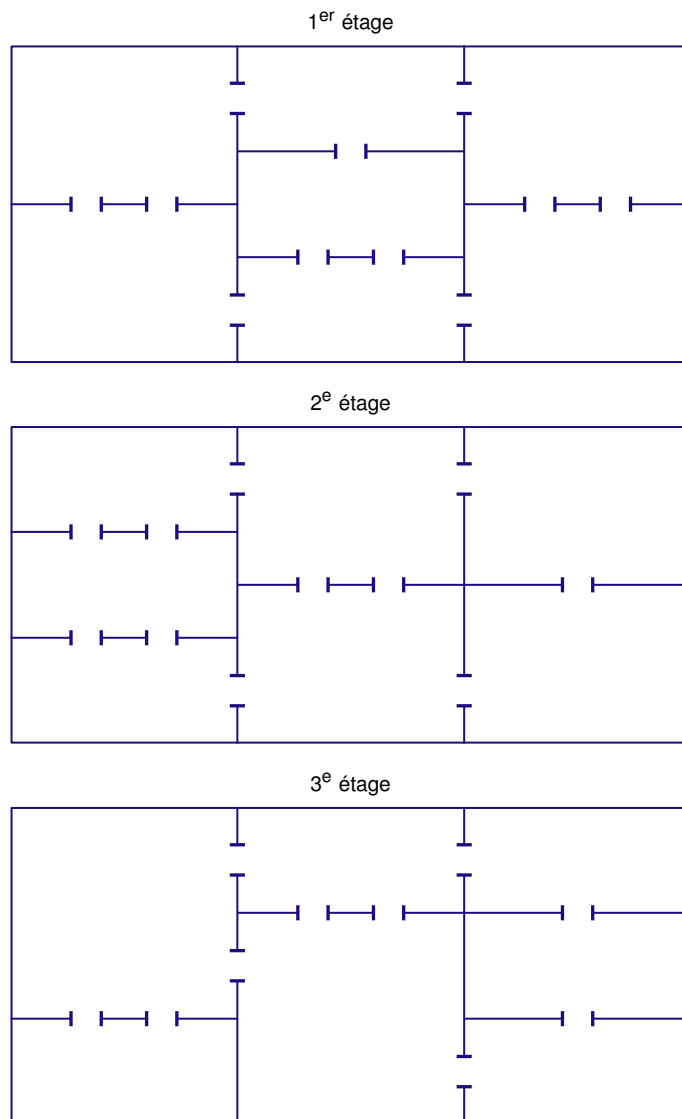
ACTIVITÉ 1

Voici le plan de trois étages d'un musée. À chaque étage, un visiteur se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

Pour chacun des étages :

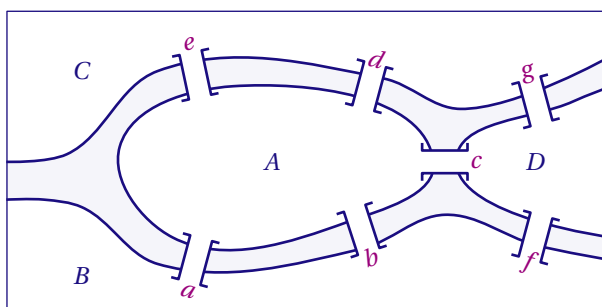
Est-il possible de faire le tour de l'étage en passant exactement une seule fois par chacune des portes?

Dans ce cas, où faut-il placer les portes d'entrée et de sortie de l'étage pour que ce parcours reste possible?



ACTIVITÉ 2

Voici un plan de la ville de Königsberg :



Est-il possible de se promener en ne passant qu'une seule fois sur chacun des sept ponts?

II CHÂÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

1 DÉFINITIONS

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste. Le premier et le dernier élément de la liste sont les extrémités initiale et finale de la chaîne.

Si le graphe est simple, on peut définir une chaîne par la liste de ses sommets ou de ses arêtes.

1. La *longueur d'une chaîne* est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
2. Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une *chaîne simple*.
3. Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
4. Une *chaîne est fermée* si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
5. Une chaîne fermée est un *cycle* si elle est composée d'arêtes toutes distinctes.

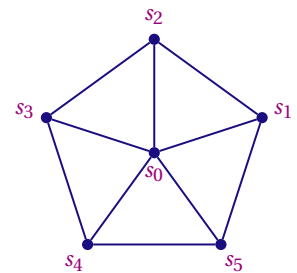
REMARQUE

Les définitions précédentes, peuvent être transposées au cas des graphes orientés. On parlera de *chaîne orientée* ou *chemin* et de *cycle orienté* ou *circuit*.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre :

- La chaîne $\{s_0; s_1; s_0; s_2; s_0; s_3; s_0; s_4; s_0; s_5; s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_3; s_0; s_4; s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_0; s_3; s_4; s_0; s_5; s_1\}$ est un cycle de longueur 7.



2 CHÂÎNES DE LONGUEUR DONNÉE

NOMBRE DE CHÂÎNES

Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^n .

DISTANCE

Soit G un graphe; si x et y sont deux sommets de G , la distance de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y .

REMARQUES

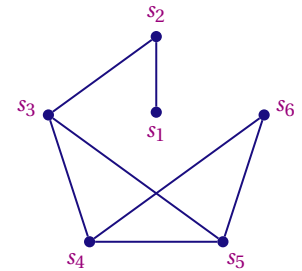
- La distance d'un sommet à lui-même est nulle.
- S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y , la distance de x à y est infinie.

DIAMÈTRE

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

EXEMPLE

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre



Déterminons la matrice des distances D du graphe, dont le coefficient $d_{i,j}$ est égal à la distance entre les sommets i et j .

La distance d'un sommet à lui même est nulle et, on utilise le symbole ∞ pour indiquer que la distance entre deux sommets n'est pas encore fixée.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 1 :

La matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 2 :

La matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 3 :

La matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 4 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La plus grande des distances entre deux sommets du graphe est 4 donc le diamètre du graphe est 4.

3 CONNEXITÉ

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G .

Autrement dit : Un graphe est connexe si on peut atteindre n'importe quel sommet à partir d'un sommet quelconque en parcourant différentes arêtes

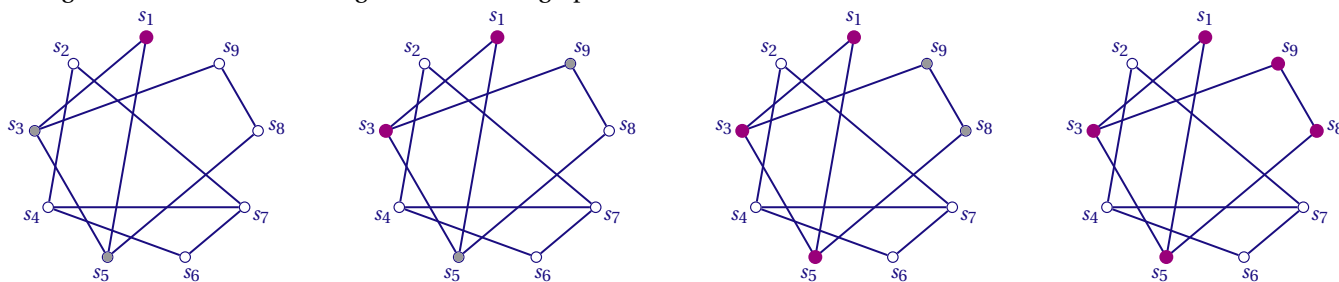
ALGORITHME

L'algorithme suivant permet de déterminer tous les sommets qui peuvent être atteints à partir d'un sommet.

Marquer provisoirement (*au crayon*) le sommet x ;
Tant que des sommets sont provisoirement marqués
 choisir un sommet y provisoirement marqué;
 marquer provisoirement les sommets adjacents non marqués;
 marquer définitivement (*à l'encre*) y ;
Fin Tant que

Si tous les sommets sont définitivement marqués alors le graphe est connexe, sinon on a obtenu *la classe de connexité* du sommet x .

La figure suivante illustre cet algorithme sur un graphe



Le graphe n'est pas connexe, il n'existe pas de chaîne entre les sommets s_1 et s_2 .

4 CYCLE EULÉRIEN

DÉFINITION

Un cycle eulérien (*respectivement une chaîne eulérienne*) dans un graphe G est un cycle (*respectivement une chaîne*) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

THÉORÈME 1

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

* DÉMONSTRATION

Si le graphe possède 0 ou 1 sommet, la preuve est triviale, on suppose donc que l'ordre du graphe est supérieur ou égal à 2.

Si le graphe connexe admet un cycle eulérien alors en chaque sommet le cycle eulérien « entrant » dans le sommet doit « ressortir » et comme les arêtes du cycle ne peuvent être utilisées qu'une fois, chaque sommet est de degré pair.

Réciproquement :

Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.

Comme G possède au moins deux sommets, tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe au moins un cycle dans G .

Formons un cycle C_1 dans G (chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes).

- Si C_1 contient toutes les arêtes du graphe alors G admet un cycle eulérien et le théorème est démontré.
- Dans le cas contraire, le sous graphe H de G défini par les arêtes non utilisées par C_1 a tous ses sommets de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet.
 Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle C_1 . Soit x_i un tel sommet. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle C_2 dans H à partir de x_i .
 En insérant dans le cycle C_1 à partir du sommet x_i le cycle C_2 , on obtient un cycle C'_1 . Si ce cycle contient toutes les arêtes de G , C'_1 est le cycle eulérien cherché.
 Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.

THÉORÈME 2

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne

* DÉMONSTRATION

Soit G un graphe connexe. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, alors le graphe G admet un cycle eulérien.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2. Soit s_i et s_j les deux sommets de degré impair.

Le graphe G' obtenu en ajoutant l'arête $s_i s_j$ au graphe G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. G' admet un cycle eulérien dont l'origine est le sommet s_i .

Par conséquent G contient une chaîne eulérienne qui commence en s_i et se termine en s_j .

ALGORITHME

Les démonstrations précédentes permettent de construire une chaîne eulérienne dans un graphe connexe dont le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

SI deux sommets sont de degré impair **ALORS**
 construire une chaîne simple C ayant pour extrémités ces deux sommets;
Fin SI
SI tous les sommets sont de degré pair **ALORS**
 construire un cycle C à partir d'un sommet quelconque;
Fin SI
marquer les arêtes de C ;
Tant que il reste des arêtes non marquées
 choisir un sommet x de C ;
 SI il existe un cycle d'origine x ne contenant aucune des arêtes marquées **ALORS**
 marquer les arêtes du cycle d'origine x ;
 remplacer dans C le sommet x par le cycle d'origine x ;
 Fin SI
Fin Tant que

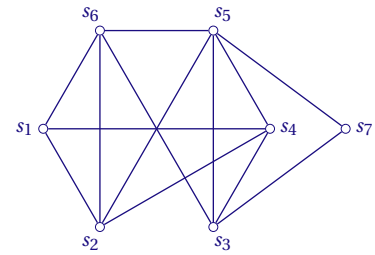
EXEMPLE

Le cycle $\{s_1; s_6; s_5; s_7; s_3; s_4; s_2; s_1\}$ contient tous les sommets du graphe G ci-contre.

Donc G est connexe.

Il n'y a que deux sommets de degré impair s_1 et s_5 .

Il existe une chaîne eulérienne d'extrémités s_1 et s_5 .

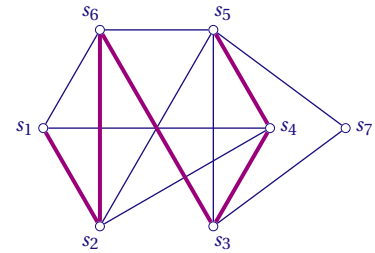


ÉTAPE 1

Les deux sommets de degré impair sont s_1 et s_5

On construit une chaîne simple joignant ces deux sommets;

$$C = \{s_1; s_2; s_6; s_3; s_4; s_5\}$$



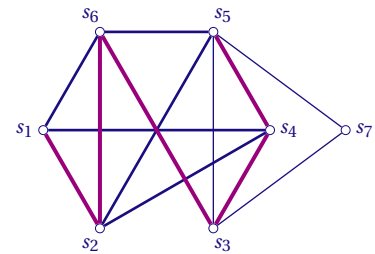
ÉTAPE 2

Le cycle simple $c_1 = \{s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_1 en remplaçant le sommet s_2 dans la chaîne C par le cycle c_1 .

$$C = \{s_1; s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2; s_6; s_3; s_4; s_5\}$$

Il reste encore des arêtes non marquées, on recommence l'étape 2



Le cycle $c_2 = \{s_3; s_7; s_5; s_3\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_2 en remplaçant le sommet s_3 dans la chaîne C par le cycle c_2 .

$$C = \{s_1; s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2; s_6; s_3; s_7; s_5; s_3; s_4; s_5\}$$

Toutes les arêtes sont marquées C est une chaîne eulérienne.

